Probabilidade Subjetiva

De Groot, 1970. Optimal Statistical Decisions

Seja S um espaço amostral com σ-álgebra Σ. Queremos desenhar uma medida de probabilidade $P : \Sigma \to [0,1]$.

$$A \prec B \Leftrightarrow B \text{ é mais provável do que } A$$
$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ são equiprováveis}$$

Se $P(A) \leq P(B) \Leftrightarrow A \precsim B$, P concorda com $\precsim$.

(A1) $\forall A, B \in \Sigma$, vale a tricotomia da relação $\prec$.
(A2) Se A_1, A_2, B_1 e $B_2 \in \Sigma$ com $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$, com $A_i \precsim B_i$, então $A_1 \cup A_2 \precsim B_1 \cup B_2$. Se vale pelo menos uma desigualdade, então valerá na união também.

- (A2) implica transitividade de $\precsim$.
- (A2) se extende para união de n conjuntos.
- $A \precsim B \Leftrightarrow B^c \precsim A^c$. ⤳ prova-se facilmente por absurdo.

(A3) $\forall A \in \Sigma$, $\emptyset \precsim A$ e $\emptyset \prec S$.

- (A3) implica que $A \subseteq B \Rightarrow A \precsim B$. ⤳ $B \setminus A \succsim \emptyset$

↳ distingue uma prob. countably additive da finitely additive

(A4) $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ e $A_i \succsim B$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \succsim B$.

- (A4) implica seu dual para uma sequência crescente.

Além disso, extende (A2) para uma união infinita enumerável.

Obs.: Nem sempre optamos pelo evento mais provável, principalmente quando os eventos não são eticamente neutros. Por isso, comparar eventos deve relevar consequências que dependam na sua ocorrência ou não.

Temos que $(A_1) - (A_4)$ não definem uma dist. de probabilidade (Kraft, Pratt, e Seidenberg (1959)).

Seja X v.a. com $0 \leq X \leq 1$. Dizemos que $X \sim \mathcal{U}nif[0,1]$ se $\forall I_1, I_2 \subseteq [0,1]$, $\{X \in I_1\} \preceq \{X \in I_2\} \Leftrightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$.

(A5) Existe $X \sim \mathcal{U}nif[0,1]$.

Construção da distribuição de probabilidade

Suponha (A1)-(A5) e defina $G(a,b) = \{X \in (a,b)\}$. Em particular $G(a_1,b_1) \precsim G(a_2,b_2) \Leftrightarrow b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2$.

Teorema: Tome $A \in \Sigma$. Existe um único $a^* \in [0,1]$ tal que

$$A \sim G[0,a^*].$$

Dem.: $U(A) := \{a : G[0,a] \succsim A\}$. Note que $1 \in U(A)$. Seja $a^* = \inf U(A)$. Em particular,

$$G[0,a^*] = \bigcap_{i=1}^{\infty} G[0,a_i],$$

$a_i \searrow a^*$. Por (A4), $G[0,a^*] \succsim A \Rightarrow a^* \in U(A)$. Se $a^* = 0$, $A \precsim G[0,0] \sim \emptyset \Rightarrow G[0,0] \sim A$.
$a^* > 0$. Se $a_i \nearrow a^*$, $G[0,a^*) = \bigcup_{i=1}^{\infty} G[0,a_i]$ e $G[0,a^*] \preceq A$ e concluímos a prova.

Defina $P(A)$ como o valor tal que $A \sim G[0, P(A)]$.

De fato P concorda com $\precsim$ e P define uma medida de probabilidade.