Curvas e Superfícies, FGV/EMAp 2021 Lista 1 #
Asla Medeiros e Sá (data de entrega: 01/03/2021) – monitor: Lucas Moschen

Tópicos: *Conceito de curva*, *curvas implícitas e paramétricas*, *exemplos de curvas famosas*,*definição de curvas planas*, *curva parametrizada diferenciável regular*, *vetor tangente*.

---

1. Encontrar uma curva (parametrizada) $\alpha(t) : t \in I \to \mathbb{R}^2$; cujo traço seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$; de maneira que t percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0) = (0, 1)$. Faça o desenho em Geogebra, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva.

2. A *limaçon* (ou caracol de Pascal) é a curva parametrizada

$$\gamma(t) = ((1 + 2cos(t)).cos(t); (1 + 2cos(t)).sin(t)); t \in \mathbb{R}$$

Faça o desenho desta curva. Observe que o ponto $(0, 0)$ pertence ao traço da curva, e ache o vetor tangente nesse ponto.

3. A *Cissoide de Diocles* é a curva definida implicitamente pela equação

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$$

. Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em Geogebra, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Busque informação para entender qual o fenomeno modelado por esta curva que a tornou famosa. (Dica: use $y = xt$ para encontrar uma parametrização da curva)

4. O *Folium de Descartes* é definido implicitamenete pela equação

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

. Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em Geogebra, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. A descrição implicita desta curva da origem a uma familia de curvas da forma

$$F_\epsilon(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - \epsilon$$

. Observe, usando o Geogebra, a mudança no traço da curva ao mudar de elemento da familia (ex.: $\epsilon = -\frac{1}{10}$).

5. Verifique que a aplicação $\alpha(t) = (acos(t), bsen(t)), t \in \mathbb{R}$, com a e b constantes não-nulas, é uma curva parametrizada diferenciável. Descreva o traço de α.

6. Obtenha uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(0) = (2, 0)$ e $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$.

7. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ á constante se, e somente se, para cada $t \in I$, o vetor $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

8. Prove que, se uma curva regular $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$, é tal que $x'(t) \neq 0 \forall t \in I$, então o traço de α é o gráfico de uma função diferenciável.

9. Considere a espiral logaritmica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t.cos(t), e^t.sin(t))$. Desenhe a curva em ambiente computacional e mostre que o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vetor tangente em $\gamma(t)$ não depende de t.