Curvas e Superfícies, FGV/EMAp 2018 Lista 3 #
Asla Medeiros e Sá (data de entrega: 22/03/2021), monitor: Lucas Moschen

Tópicos: *reparametrização por comprimento de arco*, *curvatura*, *Diedro de Frenet*, *diferenciabilidade de aplicações.*

---

1. Verifique a regularidade e calcule o comprimento de arco e a curvatura das seguintes curvas, quando possível:
   - (retas) $\alpha(t) = (a + ct, b + dt), t \in \mathbb{R}$;
   - $\alpha(t) = (t, t^4), t \in \mathbb{R}$;
   - (círculos) $\alpha(s) = (a + r.cos(s/r), b + r.sen(s/r)), s \in \mathbb{R}$, $r > 0$;
   - (cardióide) $\alpha(t) = (cos(t).(2cos(t) - 1), sen(t).(2cos(t) - 1)), t \in \mathbb{R}$;
   - (catenária) $\alpha(t) = (t, cosh(t)), t \in \mathbb{R}$.
2. Considere a elipse $\beta(t) = (acos(t), bsen(t)), t \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$. Obtenha os valores de $t$ onde a curvatura de $\beta$ é máxima e mínima.
3. Seja $I = (-a, a), a > 0$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, o qual é simétrico com respeito à origem. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco.
   - Mostre que $\beta : I \to \mathbb{R}^2$, em que $\beta(s) = \alpha(-s)$, é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco e que satisfaz $k_\beta(s) = -k_\alpha(-s) \forall s \in I$ (Isto é, *a curvatura de uma curva plana muda de sinal quando se inverte a sua orientação*)
   - Desenhe em ambiente computacional um par de parametrizações de uma curva que ilustre o fato demonstrado no ítem anterior.
4. Considerando o conceito de derivada como aproximação linear. Considere a aplicação:

$$f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to (x^3 + y^3, x^3 - y^3)$$

   determine suas derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$.

5. Uma aplicação $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dita um *movimento rígido* quando preserva distâncias. Isto é:
$$\|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\|$$
Verifica-se que todo movimento rígido se escreve de forma única como composta de uma transformação linear ortogonal e uma translação, ou seja:
$$\Phi(p) = A.p + p_0 \forall p \in \mathbb{R}^2,$$
em que, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador linear ortogonal e $p_0$ um ponto de $\mathbb{R}^2$. Diz-se que $\Phi$ é *direto* ou *inverso*, conforme $det(A) = 1$ ou $-1$ respectivamente. Verifique que $\Phi$ é diferenciável e calcule $\Phi'(p)$ e $\Phi''(p)$

6. Mostre que uma matriz de rotação e uma matriz de reflexão são aplicações lineares ortogonais e, portanto, podem ser interpretadas como um movimento rígido.

7. Mostre que movimentos rígidos levam retas em retas e círculos em círculos.

8. Exemplifique, em ambiente computacional, movimentos rígidos sendo aplicados em uma curva de sua preferência.