CURVAS E SUPERFÍCIES

M. Soledad Aronna, EMAp/FGV
Monitor: Fellipe Lopes

4° Lista de Exercícios - 22 de março de 2020

1. Fórmulas de Frenet para curvas não parametrizadas pelo comprimento de arco

Seja $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ uma curva com velocidade $\|\alpha'(t)\|$ arbitrária. Sabemos que podemos reparametrizar α e obter uma curva $\bar{\alpha}(s) = \alpha(t(s))$ onde $t(\cdot)$ é uma mudança de parâmetro com inversa

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt.$$

Para a curva $\bar{\alpha}$ (já parametrizada pelo comprimento de arco), consideremos o triedro de Frenet, curvatura e torção: $\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\kappa}, \bar{\tau}$.

Definição 1.1. Definimos os seguintes vetores e funções associados a α :

- Vetor tangente unitário: $\mathbf{t}(t) := \bar{\mathbf{t}}(s(t))$.
- Curvatura: $\kappa(t) := \bar{\kappa}(s(t))$.

Se $\kappa(t) > 0$ definimos também:

- Vetor normal unitário: $\mathbf{n}(t) := \bar{\mathbf{n}}(s(t))$.
- Vetor binormal unitário: $\mathbf{b}(t) := \bar{\mathbf{b}}(s(t))$.
- Torção: $\tau(t) := \bar{\tau}(s(t))$.

Por exemplo,

$$\mathbf{t}(t) = \bar{\mathbf{t}}(s(t)) = \bar{\alpha}'(s(t)) = \frac{d\alpha}{dt}(t)\frac{dt}{ds}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Teorema 1.1 (Fórmulas de Frenet-Serret para curvas não parametrizadas pelo comprimento de arco)**.** *Seja $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ regular, $\nu(t) := \|\alpha'(t)\|$ a sua velocidade, $\kappa > 0$ sua curvatura. Então:*

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(t) = \kappa(t)\nu(t)\mathbf{n}(t), \\ \mathbf{n}'(t) = -\kappa(t)\nu(t)\mathbf{t}(t) - \tau(t)\nu(t)\mathbf{b}(t), \\ \mathbf{b}'(t) = \tau(t)\nu(t)\mathbf{n}(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

Podemos escrever este sistema de equações diferenciais lineares em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Lembrem que muitos livros usam $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$, logo a torção é a oposta da nossa e as equações têm o sinal oposto diante da τ!!

Demonstração.

$$\mathbf{t}'(t) = \bar{\mathbf{t}}'(s(t))\frac{ds}{dt}(t) = \bar{\kappa}(s(t))\bar{\mathbf{n}}(s(t))\nu(t) = \kappa(t)\nu(t)\mathbf{n}(t).$$

As provas das outras duas equações são similares. *Exercício: terminar a demonstração.* □

Teorema 1.2 (Fórmulas para $\mathbf{b}, \kappa, \tau$)**.** *Temos as seguintes fórmulas para calcular $\mathbf{b}, \kappa, \tau$ usando as derivadas de uma parametrização arbitrária (não necessariamente por comprimento de arco):*

(i) $\mathbf{b} = \dfrac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$,

(ii) $\kappa = \dfrac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$,

(iii) $\tau = \dfrac{(\alpha'' \times \alpha') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$.

(Lembrem que muitos livros usam $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$, logo a torção é a oposta da nossa e as equações têm o sinal oposto diante da τ).

Exercícios

(1) Terminar a demonstração do Teorema 1.1.
(2) Provar (i) do Teorema 1.2.
(3) Provar (ii) do Teorema 1.2.
(4) Provar (iii) do Teorema 1.2.
(5) Usando as fórmulas do Teorema 1.2, calcular a curvatura e a torção da hélice circular

$$\gamma(\theta) = \Big(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\Big).$$