Curvas e Superfícies, FGV/EMAp 2021 Lista 4 #
Asla Medeiros e Sá - data de entrega: **29/03/2021** - Monitor: Lucas Moschen.

Tópicos: *curvas em* $\mathbb{R}^3$, *curvatura e torção*, *triedro de Frenet*, *equações de Frenet*.

---

1. Verifique se as seguintes curvas são 2-regulares:
   (a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$
   (b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t), t \in \mathbb{R}$

2. Prove que a aplicação $\alpha(t) = (1 + cos(t), sen(t), 2.sen(t/2), t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro $C = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + y^2 = 1$ e da esfera $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Desenhe a curva α, o cilindro C e a esfera S em ambiente computacional.

3. Obtenha uma reparametrização por comprimento de arco da curva
$$\alpha(t) = (e^t.cos(t), e^t.sen(t), e^t), t \in \mathbb{R}$$

4. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que $\|\alpha'(t)\|$ é constante se, e só se, $\forall t \in I, \alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$. Em particular, mostre que $\|\alpha'(t)\|$ é constante para a hélice circular $\alpha(t) = (a.cos(t), a.sen(t), b.t), t \in \mathbb{R}$.

5. Em ambiente computacional, desenhe as seguintes curvas e produza uma animação do triedro de Frenet de cada curva:
   (a) $\alpha(t) = (4.cos(t), 5 - 5.sen(t), -3.cos(t)), t \in \mathbb{R}$
   (b) $\beta(t) = (1 - cos(t), sen(t), t), t \in \mathbb{R}$

6. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular, a qual, não é, necessariamente, parametrizada por comprimento de arco. Prove, então, que
$$k_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$
$$\tau_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$
em que $\times$ denota o produto vetorial.

7. Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

   (a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

   (b) $\beta(t) = (cos(t), sen(t), t), t \in \mathbb{R}$

8. Seja $\alpha(t)$ uma curva 2-regular:

   (a) Verifique que $\alpha''(t)$ é paralelo ao plano osculador de α em t.

   (b) Prove que o plano osculador de α em t_0 é dado pelos pontos P de $\mathbb{R}^3$ tal que $\langle P - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0) \rangle = 0$.

9. Desenhe em ambiente computacional as curvas e seus planos normal e osculador em função do parâmetro:

   (a) $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3), t \in \mathbb{R}$

   (b) $\beta(t) = (a.cos(t) + b.sen(t), a.sen(t) + b.cos(t), c.sen(2t)), t \in \mathbb{R}$

10. Verifique que o vetor binormal de uma hélice circular forma um ângulo constante com o eixo do cilindro sobre o qual está a hélice. Ilustre o fato em ambiente computacional.

11. Prove que a aplicação

$$\alpha(s) = (\frac{4}{5}.cos(s), 1 - sen(s), -\frac{3}{5}.cos(s)), s \in \mathbb{R}$$

é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cujo traço é um círculo. Determine, então, seus centro e raio.