

Tópicos: *superfícies regulares, superfícies parametrizadas regulares, mudança de parâmetro.*

Definição [Superfícies C^k , suave, regular]: Lembremos que a *Matriz Jacobiana* ou *Jacobiano* de $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no ponto $x \in S$ é a matriz $m \times n$ dada por:

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Uma superfície diz-se:

- C^k se cada parametrização do atlas é uma função de classe C^k ;
- *suave* (ou C^∞) se cada parametrização é C^∞ ;
- *regular* se para cada $\sigma: U \rightarrow V$ do atlas e cada $q \in U$, a matriz Jacobiana $J_\sigma(q)$ tem característica 2 (posto 2).

Temos

$$J_\sigma(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \end{pmatrix},$$

onde $\sigma(x, y) = (\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y), \sigma_3(x, y))$. O posto de $J_\sigma(q)$ igual a 2 equivale a que sua coluna sejam linearmente independentes. Isto é, uma superfície é regular se os vetores

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) &= \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) \right) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) &= \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \right) \end{aligned}$$

são linearmente independentes, isto é:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \neq (0, 0, 0), \quad \forall q \in U.$$

1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Mostre que: F é injetora se, e só se, a imagem da base canônica de \mathbb{R}^2 forma um conjunto de vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 ou, equivalentemente, se a matriz associada de F tem posto 2. (obs.: Repare que este resultado está sendo usado para o conceito de superfície regular descrito acima).
2. Mostre que o parabolóide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ é uma *superfície regular*. Desenhe o parabolóide em um ambiente gráfico juntamente com o plano tangente e um vetor normal à superfície. Faça o desenho de forma a poder variar o ponto aonde o plano tangente é exibido.
3. Mostre que, se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de \mathbb{R}^2 , então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma *superfície parametrizada regular*, que descreve o gráfico da função f .
4. Considere o *hiperbolóide de uma folha*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

Mostre que, para todo θ , a reta

$$(x - z)\cos\theta = (1 - y)\sin\theta, (x + z)\sin\theta = (1 + y)\cos\theta$$

está contida em S , e que, todo ponto do hiperbolóide está em alguma dessas linhas. Desenhe o hiperbolóide e as linhas em um ambiente gráfico. Deduza que a superfície pode ser coberta por uma única parametrização.

5. Considere uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in I \subset \mathbb{R}$ Seja o subconjunto de \mathbb{R}^3 gerado pelas retas que passam por $\alpha(s)$, paralelas ao eixo O_z . Dê uma condição suficiente que deve satisfazer a curva α para que S seja o traço de uma *superfície parametrizada regular*.
6. **Extra:** Mostre que o cilindro circular

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

pode ser descrito por uma parametrização global, isto é, que existe um atlas composto só por uma única carta. PS.: esse vai com resposta! Vejam no link e desenhem para se convencer:

<https://math.stackexchange.com/questions/1664320/showing-a-circular-cylinder-is-a-surface>