Curvas e Superfícies, FGV/EMAp 2021 Lista 6 #
Asla Medeiros e Sá (data de entrega: 26/05/2021 - quarta-feira)

Tópicos: *Topologia, conjuntos abertos, fechados, compactos e conexos, continuidade e homeomorfismo.*

---

1. Provar que toda bola aberta $B(x;r)$ é um conjunto aberto.

   Solução: Seja $y \in B(r;x)$. Queremos provar que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(y;\epsilon) \subseteq B(r;x)$. Definimos para isto $\epsilon := r - |y-x| > 0$. Logo, dado qualquer ponto $z \in B(y;\epsilon)$, temos que
   $$|z-x| \leq |z-y| + |y-x| < \epsilon + |y-x| = r - |y-x| + |y-x| = r.$$
   Logo $z \in B(x;r)$. Isto é, $B(y;\epsilon) \subseteq B(x;r)$. Concluímos que $B(x;r)$ é aberto.

2. Provar que $Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0\}$ é aberto. *Dica:* Seja (a,b) no conjunto Z. Seja $\epsilon := \min\{|a|,|b|\} > 0$. Provar que $B((a,b);\epsilon) \subseteq Z$.

3. Provar que união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

   Solução: Seja $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de abertos, onde Λ é um conjunto de índices (possívelmente infinito, não enumerável). Consideremos a união:
   $$A := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$
   Seja $z \in A$. Logo $z \in A_\lambda$ para algum índice λ. Dado que A_λ é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z;\epsilon) \subseteq A_\lambda$. Logo $B(z;\epsilon) \subseteq A$. Concluímos que A é aberto.

4. Provar que a interseção de uma quantidade finita de abertos é um conjunto aberto.

5. Provar que a interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado. Será que união de fechados é também fechado? Se não for certo, dar um contraexemplo.

6. Dê exemplos de conjuntos que não são nem abertos nem fechados.

7. Prove que
   $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$
   é aberto.

8. Prove que um conjunto em $\mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, é união de bolas abertas.

9. Provar que $\mathbb{R} \times \{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}^2$.

10. Prove que as bolas fechadas são conjuntos fechados.

11. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que existe $d > 0$ tal que $\|x - y\| \geq d$ para todo par de pontos $x, y \in A$. Prove que A é fechado em $\mathbb{R}^n$.

12. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto não vazio contido numa reta de $\mathbb{R}^2$. Prove que A não é aberto.

13. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Prove que $\mathbb{R}^n \backslash int(A)$ é fechado.

14. Seja $A \subset B \subseteq \mathbb{R}^n$, e x ponto de acumulação de A. Será que x é também ponto de acumulação de B?

15. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, prove que sua fronteira tem interior vazio.

16. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$. Prove que, dado $a \in \mathbb{R}^n \backslash A$, o conjunto $A \cup \{a\}$ é aberto se, e somente se, a é um ponto isolado da fronteira de A.

17. Prove que se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado então sua fronteira tem interior vazio.

18. Sejam $F \in \mathbb{R}^n$ fechado e $f : F \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua. Mostre que f leva subconjuntos limitados de F em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^m$. Prove, exibindo um contra-exemplo, que não se conclui o mesmo removendo-se a hipótese de F ser fechado.

19. Prove que duas bolas abertas de $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas.

    Solução: Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, consideremos a aplicação:

$$
\begin{aligned}
f : B(0,1) &\to B(a,r) \\
x &\to rx + a
\end{aligned}
$$

    A aplicação f é bijetiva e contínua. Sua inversa, $f^{-1} : B(a,r) \to B(0,1)$, é dada por $f^{-1}(y) = \frac{1}{r}(y - a)$, donde se vê que f^{-1} é contínua, portanto f é um homeomorfismo. Pela transitividade da relação de homeomorfismo, conclui-se que duas bolas bertas quaisquer de $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas. Um argumento análogo prova que vale o mesmo para duas bolas, ambas, fechadas.

20. Verifique que a aplicação:

$$\begin{aligned} f : B(0,1) &\to \mathbb{R}^n \\ x &\to \frac{x}{1 - ||x||} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo entre a bola aberta unitária $B(0,1)$ e $\mathbb{R}^n$. Conclua que qualquer bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a todo o espaço $\mathbb{R}^n$.

21. Mostre que o cone $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = \sqrt{x^2+y^2}\}$ e $\mathbb{R}^2$ são homeomorfos.