Curvas e Superfícies 2021.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Asla Medeiros e Sá
Monitor Lucas Machado Moschen — Entrega 07/06/2021

Lista 7

Exercício 1 (6.1.1) Calcule a primeira forma fundamental das seguintes superfícies:

(i) $\sigma(u,v) = (\sinh(u)\sinh(v), \sinh(u)\cosh(v), \sinh(u))$.

(ii) $\sigma(u,v) = (u-v, u+v, u^2+v^2)$.

(iii) $\sigma(u,v) = (\cosh(u), \sinh(u), v)$.

(iv) $\sigma(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$. Que tipos de superfícies são estas?

Solução 1.

Exercício 2 (6.1.3) Seja $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ a primeira forma fundamental do patch $\sigma(u,v)$ da superfície $\mathcal{S}$. Mostre que, se p é um ponto da imagem de σ e v, $w \in T_p\mathcal{S}$, então

$$\langle v, w\rangle = Edu(v)du(w) + F(du(v)dv(w) + du(w)dv(v)) + Gdv(w)dv(w).$$

Solução 2.

Exercício 3 (6.1.5) Mostre que as seguintes condições são equivalentes em um patch $\sigma(u,v)$ com primeira forma fundamental $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$:

(i) $E_v = G_u = 0$.

(ii) σ_{uv} é paralelo ao vetor normal padrão N.

(iii) O lado oposto de qualquer quadrilátero formado por curvas paramétricas de σ tem o mesmo comprimento (veja as observações após a Proposição 4.4.2).

Quando essas condições são satisfeitas, as curvas paramétricas de σ são ditas *Chebyshev net*. Mostra que, nesse caso, σ tem uma parametrização $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v})$ com a primeira forma fundamental

$$d\tilde{u}^2 + 2\cos(\theta)d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2,$$

onde θ é uma função suave de $(\tilde{u},\tilde{v})$. Mostra que θ é o ângulo entre as curvas paramétricas de $\tilde{\sigma}$. Mostre além que, se colocamos $\hat{u} = \tilde{u}+\tilde{v}, \hat{v} = \tilde{u}-\tilde{v}$, a reparametrização resultante $\hat{\sigma}(\hat{u},\hat{v})$ de $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v})$ tem primeira forma fundamental

$$\cos^2(\omega)d\hat{u}^2 + \sin^2(\omega)d\hat{v}^2,$$

onde $\omega = \theta/2$.

Solução 3.

Exercício 4 (6.2.1) Pensando sobre como um cone circular pode ser "desembrulhado"em um plano, escreva uma isometria de

$$\sigma(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), u), u > 0, 0 < v < 2\pi,$$

(um meio cone circular com uma reta removida) a um aberto no plano XY.

Solução 4.

Exercício 5 Calcule a área do toro de revolução

Solução 5.