Monitoria 2 - 05/03/2021

Avisos:

- Conteúdo inicial sobre curvas está no site!
- A página sobre Curvatura está em construção
- Soluções Lista 1 disponíveis no site.
- Dúvidas sobre correção só conversar comigo!

Lista 2:

4c) Seja I um intervalo. Ele pode ser limitado ou ilimitado e ter diferentes topologias (fechado, aberto, semiaberto)

Exemplo: $I = (a,b),\ [a,b),\ (-\infty, b),\ [a, +\infty)$

Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$. Queremos mostrar que existe $h: J \to I$ difeomorfismo tal que J tem extremos 0 e 1 e

$$\beta = \alpha \circ h$$

① Suponha I limitado, deve preservar a topologia

$$(0,1) \xrightarrow{h} (a,b)$$

"espicha" $(0, b-a)$ translada

Devo provar que ambas transformações são diferenciáveis com inversa diferenciável

② E se I é ilimitado?

Devemos ter uma transformação de um limitado para um ilimitado: tangente, logarítmo, $t/(1-t)$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, \infty),\quad (0,1) \to (-\infty, 0),\quad (0,1) \to (0, +\infty)$$

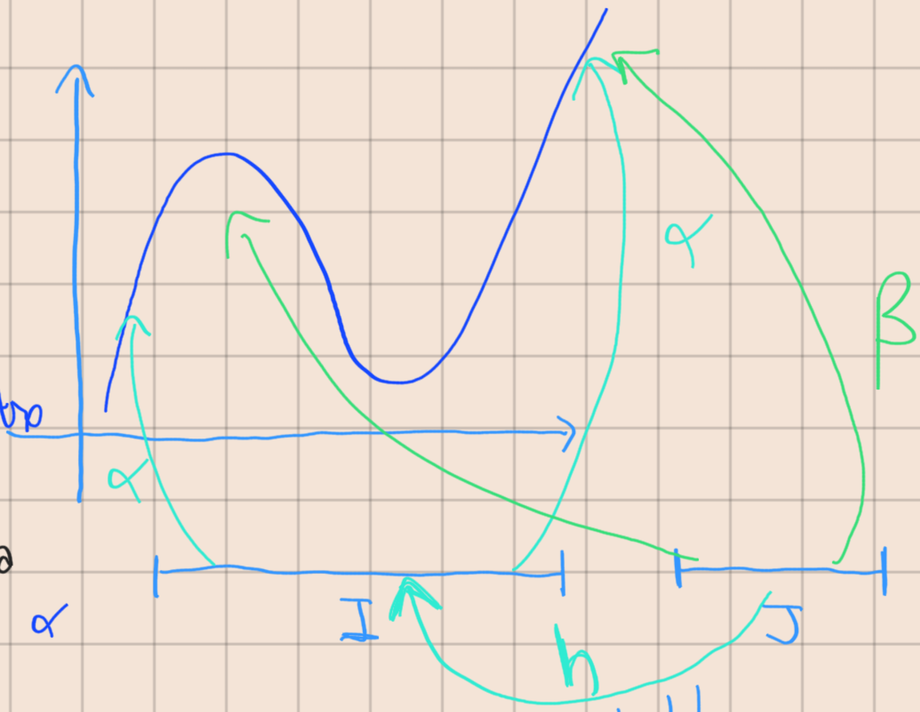
Lembre que você pode combinar transformações

$$(0,1) \to (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, \infty)$$

h

Reparametrização: imagine a curva C segundo o desenho no plano.

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$
parametrização



Seja $h : J \to I$
mudança de parâmetro

$\beta = \alpha \circ h$ é uma
reparametrização de α

regularidade

7. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ com $\|\alpha'(s)\| > 0$, $\forall s \in I$. Defina $t(s) = \dot{\alpha}(s)$ e suponha que α é parametrizado pelo comprimento de arco.

Como α é regular, ela possui par. pelo comprimento de arco, portanto é sem perda de generalidade assumir isso, dado que a curva representada pela reparametrização é a mesma.

Esse fato pode ser usado em muitas provas!

Logo $\|t(s)\|^2 = \langle t(s), t(s) \rangle = 1 \Rightarrow \langle t(s), \dot{t}(s) \rangle = 0$

Representamos uma reta como $\lambda \vec{v} + p$

vetor direção

ponto da reta

parâmetro

Nesse caso, cada reta tangente tem a forma

$$\lambda \vec{t}(s) + \vec{\alpha}(s), \ \forall s \in I$$

Por hipótese essa reta atinge P para algum λ. Assim, para cada s existe uma reta que passe por P em $\lambda(s)$, isto é, definimos

$$\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$s \longmapsto \lambda(s) = \hat{\lambda} \text{ tal que } \hat{\lambda}\vec{t}(s) + \vec{\alpha}(s) = P.$$

Assim $\lambda(s)\vec{t}(s) + \vec{\alpha}(s) = P$

$$\Rightarrow \lambda(s)\vec{t}(s) = P - \vec{\alpha}(s)$$

Temos um vetor em ambos os lados. Como sabemos que

$$\langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle = 1,$$ Lembre dessa técnica

aplicamos o prod. interno em ambos os lados. Assim

$$\lambda(s) = \langle P - \vec{\alpha}(s), \vec{t}(s) \rangle$$

que mostra que λ é diferenciável. Vamos supor que α tem segunda derivada contínua. Assim

$$\lambda(s)\vec{t}(s) + \vec{\alpha}(s) \overset{\text{constante}}{\equiv} P$$

Uma técnica muito utilizada em Geometria Diferencial é derivar expressões! Assim,

$$0 = \frac{d}{ds}(\lambda(s)\vec{t}(s) + \vec{\alpha}(s)) = \lambda'(s)\vec{t}(s) + \lambda(s)\vec{t}'(s) + \vec{t}(s)$$

Outra técnica na Geometria Diferencial é usar

$$\langle t(s), t'(s) \rangle = 0$$

Aplique isso e obterá duas expressões:

$$\lambda'(s) = -1 \quad e \quad \lambda(s)\|t'(s)\| = 0$$

Com isso, prove que $t'(s) \equiv 0$.

↳ Suponha que $t'(s) \neq 0$ e use sua continuidade para chegar num absurdo!

Também poderíamos considerar

$$\lambda \vec{t}(s) + P$$

pois P está nas retas. Tente assim com o 8.

Obs.: Não confunda "outra parametrização" com "reparametrização"