Monitoria dia 13/05/2021

- Discussões sobre definições de superfície:

→ Superfície Topológica (Ethan D. Bloch)

Subconjunto $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\forall p \in Q$, existe um aberto U contendo p (vizinhança de p) homeomorfo a um aberto em

→ aberto em Q! Isto é, existe $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto tal que $U = Q \cap W$

→ Superfície parametrizada regular (Keti Tenenblat)

Nesse caso a superfície é uma aplicação (função), e não um conjunto. Seja $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que

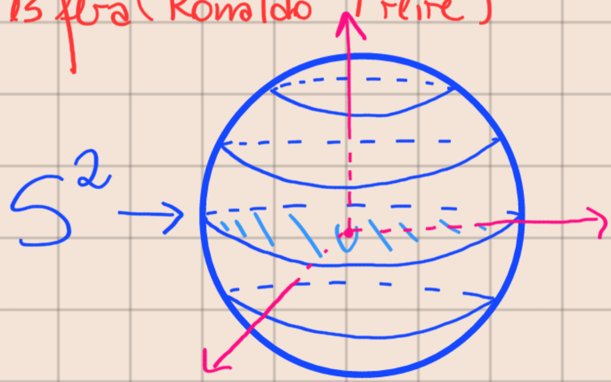
(i) U seja aberto;

(ii) X é infinitamente diferenciável;

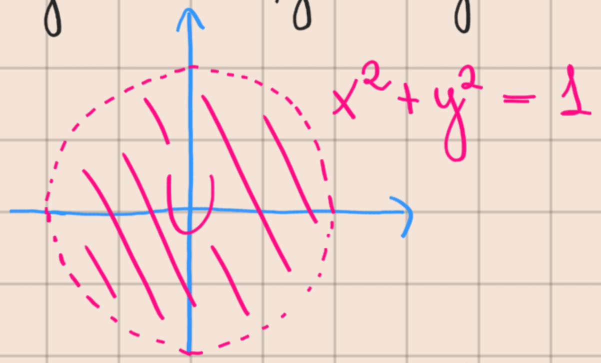
(iii) $\forall$ $p=(u,v) \in U$, a derivada de X em que $dX(q): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.

- Na primeira definição, superfície é, localmente em cada ponto, "similar" a um aberto no plano.
Na segunda, é uma parametrização diferenciável, similar à ideia de curva.

Exemplo esfera (Ronaldo Freire)



Definimos uma parametrização para o domo de cima da esfera. Seja $U = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

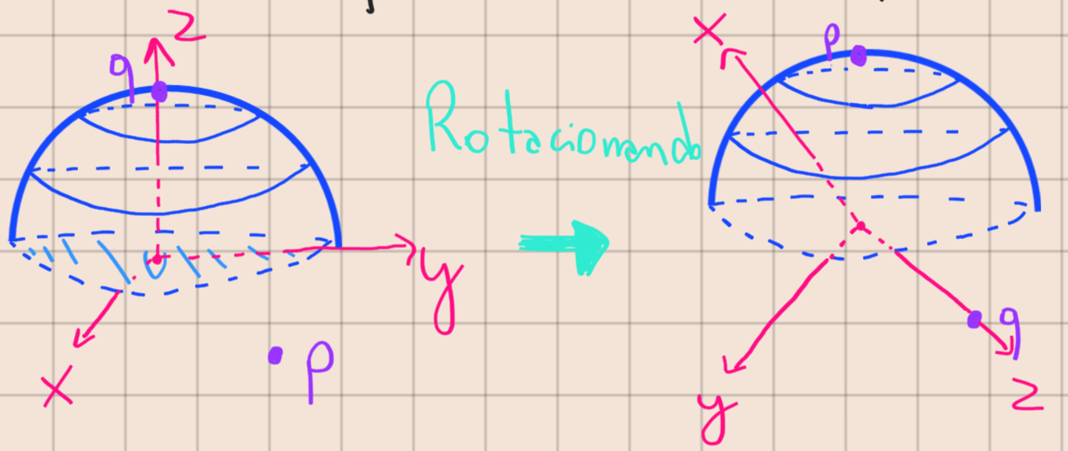


Para cada ponto $(x,y) \in U$, ele mapeia em um ponto $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ na parte de cima da esfera

Defina $\sigma(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in U$

É fácil de ver que σ é difeomorfismo
- ↳ injetiva
- ↳ sobrejetiva
- ↳ contínua / diferenciável
- ↳ inversa contínua / diff.

Agora tome $p \in S^2$. Pegue o ponto de cima do domo $q = (0, 0, 1)$. Rotacione o domo por uma função R de forma que $R(q) = p$.



Isso prova a superfície, pois $\forall p$, $\sigma(R^{-1}(p))$ é homeomorfismo entre abertos.

↱ Superficie parametriza S

$\sigma(u,v) = (u,v,f(u,v)) \to$ carta

$\sigma^{-1}(\boxed{x,y,z}) = (x,y) \to$ inversa

$\in S \Leftrightarrow (x,y,f(x,y))$

$$\begin{cases} \sigma(\sigma^{-1}(x,y,z)) = \sigma(x,y) = (x,y,\overbrace{f(x,y)}^{z}) \\ \sigma^{-1}(\sigma(x,y)) = \sigma^{-1}(x,y,f(x,y)) = (x,y) \end{cases}$$

Continuidad de σ: depende de f.

$$\begin{cases} \{(u_n,v_n)\} \xrightarrow{n\to\infty} (u,v) \\ \sigma(u_n,v_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sigma(u,v) \end{cases}$$

$$\|(u_n-u, v_n-v, f(u_n,v_n)-f(u,v))\|$$

$$\leq \overbrace{|f(u_n,v_n)-f(u,v)|}^{\to 0} + \overbrace{\|(u_n-u, v_n-v)\|}^{\to 0} < \varepsilon$$

$$\sigma^{-1}(\overbrace{u,v,f(u,v)}) = (u,v)$$

$$\{(u_n,v_n,f(u_n,v_n))\} \to (u,v,f(u,v))$$

$$\Downarrow$$

$$\{(u_n,v_n)\} \to (u,v)$$

$$\sigma^{-1}(u_n,v_n,f(u_n,v_n)) \to \sigma^{-1}(u,v,f(u,v))$$

$$\|(u_n-u, v_n-v)\| \leq \|(u_n-u, v_n-v, f(u$$

$$\sqrt{(u_n-u)^2+(v_n-v)^2} \leq \sqrt{(u_n-u)^2+(v_n-v)^2 + (f(u_n,v_n)-f(u,v))^2}$$