19/03/2021

- prova sobre antiderivada;
- involuta e evoluta

\# $\Phi = A + p_0$, $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $p_0: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $p \mapsto p_0$ → Por que escreve assim?

A e p_0 são transformações do $\mathbb{R}^2$ ao $\mathbb{R}^2$

Transformação Linear

$$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$p \mapsto A \cdot p$$

Matriz

\# $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi(x+v) - \Phi(x) = \Phi'(x) \cdot v + o(v),$$

$$\lim_{v \to 0} \frac{o(v)}{\|v\|} = 0$$

1) $A(x+v) + p_0(x+v) - A(x) - p_0(x) = A(v) + o(v)$

$$\cancel{Ax} + Av \cancel{+p_0} - \cancel{Ax} - \cancel{p_0} - Tv = o(v)$$

$$\boxed{\Phi'(x) \equiv A}$$

2) $\Phi'(x+v) - \Phi'(x) = T \cdot v + o(v)$

$$0 = T \cdot v + o(v)$$

$$\Rightarrow \quad -T \cdot v = o(v)$$

$$\lim_{v \to 0} -\frac{T \cdot v}{\|v\|} = 0 \Rightarrow T = 0$$

Quando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a derivada é

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

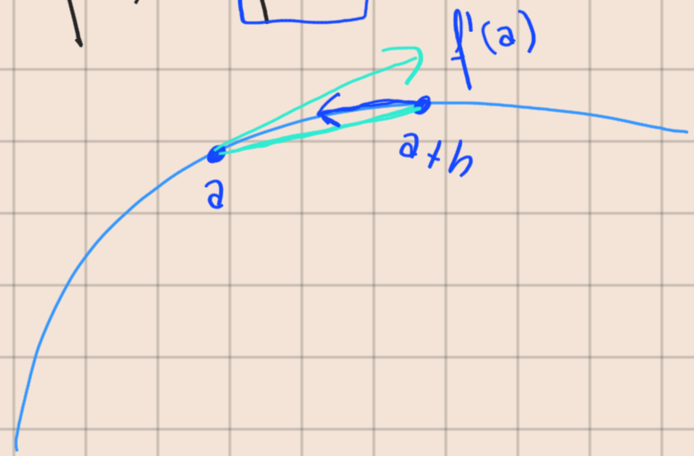
Podemos reescever como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h}{h}$$

Ou

$$f(a+h) - f(a) - \boxed{f'(a)} \cdot h = o(h)$$

Podemos ver como transformação linear $f'(a): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$h \mapsto f'(a) \cdot h$



Exemplo: $f(x,y) = (x+y, x-y)$

Sabemos que $Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ Jacobiano

Assim, devemos provar que, se $v = (v_1, v_2)$,

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{\|v\|} \left(f(x+v_1, y+v_2) - f(x,y) - Jf(x,y) \cdot v \right) = 0$$

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{\|v\|} \left[(\cancel{x} + \cancel{v_1} + \cancel{y} + \cancel{v_2}, \cancel{x} + \cancel{v_1} - \cancel{y} - \cancel{v_2}) - (\cancel{x} + \cancel{y}, \cancel{x} - \cancel{y}) - (\cancel{v_1} + \cancel{v_2}, \cancel{v_1} - \cancel{v_2}) \right] =$$

$= 0$ e está provado!

Para calcular $f''(x,y)$ usando a definição é mais complicado e, por isso, usamos as derivadas parciais.

$$f''(x,y) = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial f_1}{\partial xy} \\ \frac{\partial f_1}{\partial yx} & \frac{\partial f_1}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x^2} & \frac{\partial f_2}{\partial xy} \\ \frac{\partial f_2}{\partial yx} & \frac{\partial f_2}{\partial y^2} \end{pmatrix} \right], \quad f = (f_1, f_2)$$

Exercício: Derivar $f(x) = x^T A x$, A simétrica.

$$f'(x) = 2Ax$$
$$f''(x) = 2A$$
$$f'''(x) = 0$$

Exercício 8:

Se A é ortogonal, $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$, tal que

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Posso, então:

$\theta = \text{Slider}(-5, 5)$

$A := \{\{\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta\}, \{\operatorname{sen}\theta, \cos\theta\}\}$

$\alpha(t) :=$ Curve....

$\beta(t) := A\alpha(t) + v$