Conjunto aberto

$A: \forall x \in A, \exists r > 0, \ B(x, r) \subseteq A$

$\mathbb{R}^2$  $\mathbb{R}$ 

$\emptyset, \cancel{\mathbb{R}^n}\ A$: $x \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ A$,

$B(x, 1) = \{ y \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ A : \|x - y\| < 1 \}$

$\subseteq \cancel{\mathbb{R}^n}\ A$

$\emptyset$: Por vacuidade

Conjunto fechado

F tal que F^c é aberto

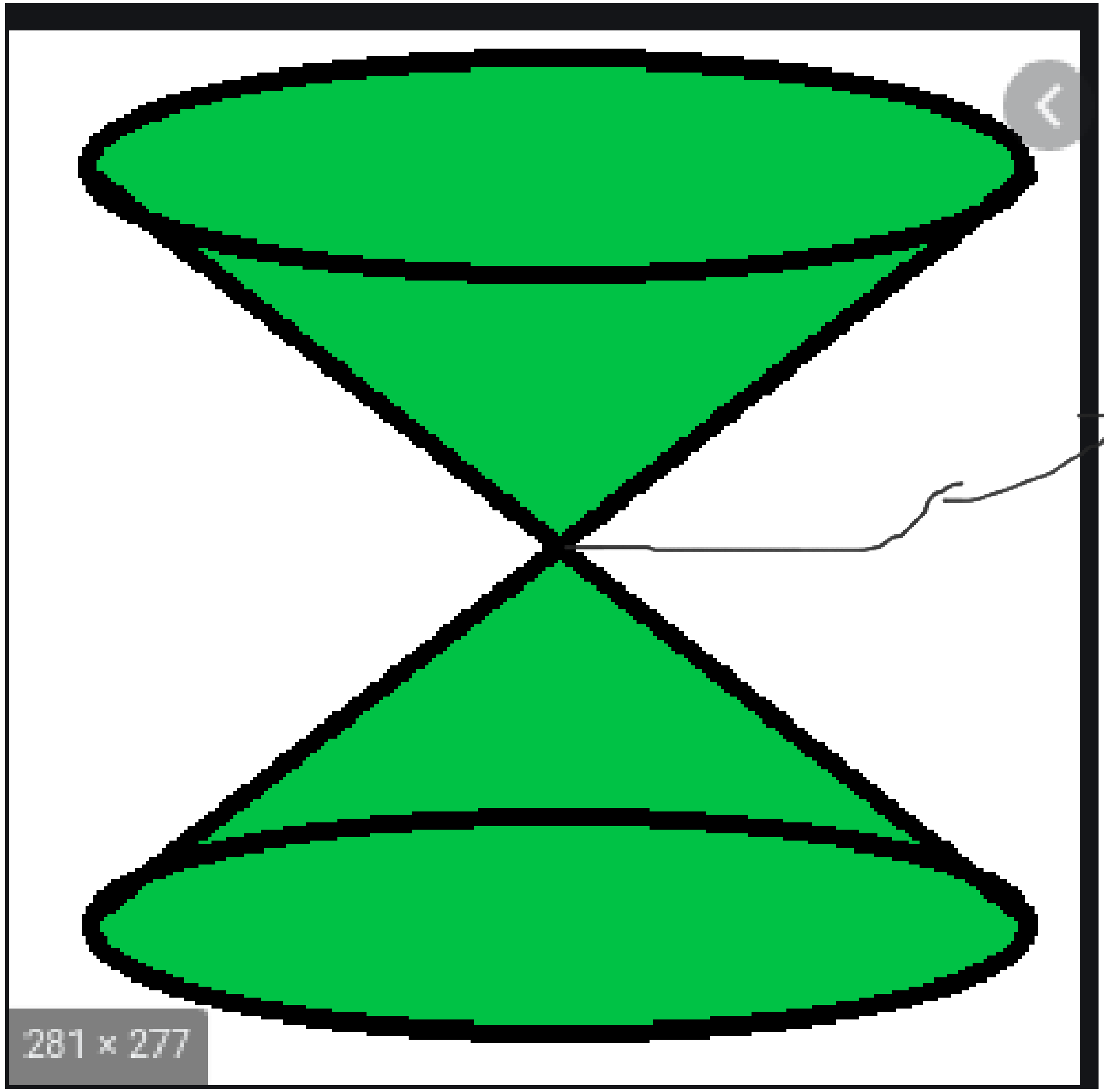
Ex.: $\mathbb{R}^n / F \Leftrightarrow \mathbb{R}^n - F$

- $[1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

  $[1, +\infty)^c = (-\infty, 1) \rightarrow$ aberto

- $\emptyset \rightarrow \emptyset^c = \mathbb{R}^n$ aberto

  $\hookrightarrow$ fechado



Ñ é

superfície

Provar que toda bola aberta B(x;r) é um conjunto aberto.

$\|x-y\| < r$

$\Rightarrow -\|x-y\| > -r$

$\|a-b\| \leq \|a-c\| + \|c-b\|$

$\varepsilon = r - \underline{\|x-y\|} > r - r = 0$

$z \in B(y,\varepsilon) \subseteq B(x,r)$ $\quad z \in B(x,r)$

$\|z-x\| \leq \|z-y\| + \|y-x\| < r$

$\varepsilon = r - \|x-y\|$

Coisas importantes

- Desigualdade triangular: $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$
- $\|x-z\| \geq \|x-y\| - \|z-y\|$

2. $Z = \{(x,y) : xy < 0\}$ é aberto.

Tome $(a,b) \in Z$

$$\varepsilon = \min\{|a|, |b|\} > 0$$

$$a \cdot b < 0 \Rightarrow a \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$$

$$B((a,b), \varepsilon) \subseteq Z$$

$(z_1, z_2) \in B((a,b), \varepsilon)$

$$\therefore \|(a - z_1, b - z_2)\| < \varepsilon$$

$$\sqrt{(a-z_1)^2 + (b-z_2)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-z_1)^2} \leq \underbrace{\sqrt{(a- \;)^2 + \underline{(b-z_2)^2}_{\geq 0}}}_{< \varepsilon}$$

$$\rightarrow |a - z_1| < \varepsilon \leq |a|$$

$$\Rightarrow -|a| < z_1 - a < |a|$$

$$\Rightarrow a - |a| < z_1 < a + |a|$$

$b - |b| < z_2 < b + |b| \rightarrow$ o mesmo vale

Se $a > 0$, $0 < z_1 < 2a \rightarrow z_1 > 0$

Se $a < 0$, $-2a < z_1 < 0 \Rightarrow z_1 < 0$

$\text{sinal}(a) = \text{sinal}(z_1)$, $\text{sinal}(b) = \text{sinal}(z_2)$

$\text{Sinal}(a \cdot b) = \text{sinal}(z_1 \cdot z_2) \Rightarrow (z_1, z_2) \in Z.$

↪ (z_1, z_2) arbitrário em $B((a,b), \varepsilon)$

$\Rightarrow B((a,b), \varepsilon) \subseteq Z$

$\Rightarrow Z$ é aberto ↪ Por que (a,b) é arbitrário em Z

↪ conjunto de índices

5. $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ fechados.

$$F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

é fechado.

De Morgan
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Dem.: $F^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right)^c$

$= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \boxed{F_\lambda^c}$ → aberto (F é fechado $\Leftrightarrow F^c$ é aberto)

→ Exercício 3: F^c é aberto $\Rightarrow F$ é fechado

Seja $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$, F_i fechado.

$F^c = \boxed{\bigcap_{i=1}^n} \boxed{F_i^c}$ → aberto; aberto → exercício 4

F é fechado.

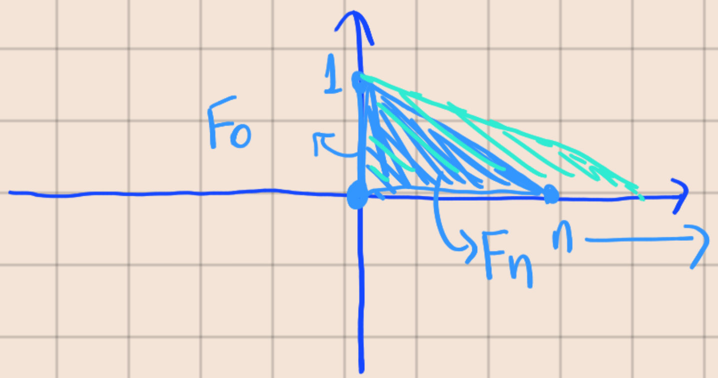
- Contra-exemplo no caso infinito:

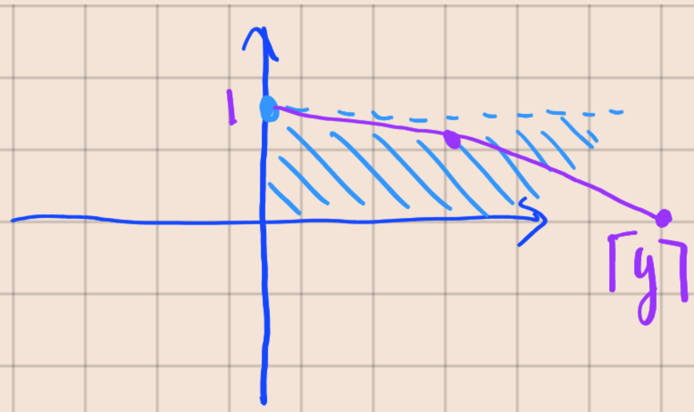
→ $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ sequência de fechados

$F_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$

$$F = \bigcup_{n=1}^\infty [-n, n] = \mathbb{R} \text{ fechado}$$

$$F = \bigcup_{n=1}^\infty [1/n, 1] = (0, 1] \text{ não é fechado}$$





8. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto $\Leftrightarrow$ A é união de bolas abertas

($\Leftarrow$) $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B(x_\lambda, r_\lambda)$

Pelo exercício 1, $B(x_\lambda, r_\lambda)$ é aberto e por 3, a união também é, logo A é aberto.

$\Rightarrow$ $\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0; \underline{B(x; \varepsilon_x) \subseteq A}$

Seja
$$B = \bigcup_{x\in A} B(x, \varepsilon_x)$$
Quero provar que $A = B$.

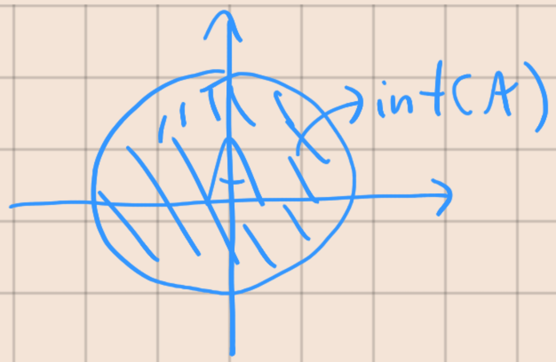
1) $A \subseteq B$. Tome $x \in A \Rightarrow x \in B(x; \varepsilon_x)$
$\Rightarrow x \in B. \Rightarrow A \subseteq B$

2) $B \subseteq A$. Tome $x \in B \Rightarrow x \in B(y, \varepsilon_y)$
para algum $y \in A$,
$$B(y, \varepsilon_y) \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A$$
E portanto $A = B$.

13. int(A) é o maior conjunto aberto contido em A.

(i) $\text{int}(A) \subseteq A$ e é aberto

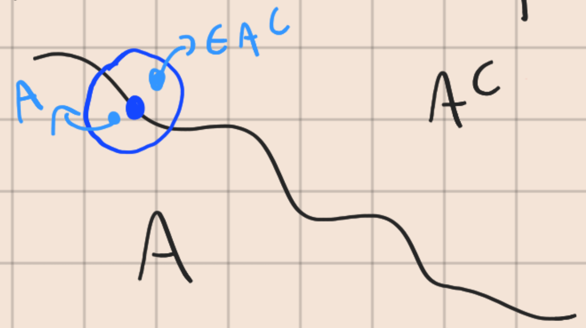
(ii) se $B \subseteq A$ e é aberto, $B \subseteq \text{int}(A)$



Se A é aberto, $A = \text{int } A = \mathring{A}$

15. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, a <u>fronteira</u> tem interior vazio.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $\forall \varepsilon > 0$,
$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.
Dizemos que $x \in \partial A$, fronteira de



$$\text{int}(\partial A) = \emptyset$$

Suponha que exista $x \in \text{int}(\partial A)$

$\exists\, r > 0$, tal que $B(x, r) \subseteq \partial A$,
$B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$,
$y \in B(x,r) \cap A$. Mas A é aberto, que existe
$\varepsilon > 0$, tal que

$$B(y, \varepsilon) \subseteq A$$

Mas $B(y, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$
Estou dizendo que $x \in B(y, \varepsilon)$ e $x \notin A$, mas
$B(y, \varepsilon) \subseteq A$,
um absurdo. Logo $\nexists\, x \in \text{int}(\partial A) \Rightarrow \text{int}(\partial A) = \emptyset$

- Em 17, provamos que $\text{int}(\partial F) = \emptyset$
  Em 15, " " $\text{int}(\partial A) = \emptyset$

E se B não é aberto e nem fechado, $\text{int}(\partial B) = \emptyset$?

Ponto isolado: Seja A um conjunto. $x \in A$ é isolado se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$