Cálculo Diferencial em Superfícies

Considere

$$\sigma : U \to S \ , \ \tilde{\sigma} : W \to S$$

duas parametrizações de S em $p \in S$. σ^{-1} e $\tilde{\sigma}^{-1}$ são contínuas

⤳ $V = \sigma(U) \cap \tilde{\sigma}(W)$ é aberto de S que contém p.

⤳ $U_0 = \sigma^{-1}(V)$ e $W_0 = \tilde{\sigma}^{-1}(V)$ são abertos

↳ Considere $U = U_0$ e $W = W_0$ para simplificar notação

Defina

↦ mudança de parâmetro

$$f = \tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma : U \to W.$$

Note que ↪ Jacobiano de σ no ponto a.

$$d\sigma_a(\mathbb{R}^2) = d\tilde{\sigma}_b(df_a(\mathbb{R}^2)) = d\tilde{\sigma}_b(\mathbb{R}^2),$$

com $a = \sigma^{-1}(p)$ e $b = \tilde{\sigma}^{-1}(p)$. // $\Rightarrow$ Independe da parametrização

⤳ **Plano Tangente:** $T_pS = d\sigma_a(\mathbb{R}^2)$, $a = \sigma^{-1}(p)$, isto é, o plano tangente de S em p é a imagem do jacobiano da parametrização no ponto $\sigma^{-1}(p)$.

Seja ψ uma extensão de $\tilde{\sigma}^{-1}$ a um aberto de $\mathbb{R}^3$ que contenha V. Assim $f = \psi \circ \sigma$ e $df_a = d\psi_p d\sigma_a$, que implica que

$$d\sigma_a : \mathbb{R}^2 \to T_pS$$

é um isomorfismo linear.

⤳ **Vetor Tangente:** Seja $p \in S$, $w \in \mathbb{R}^3$ é tangente a S em p se existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Nesse caso

$$T_pS = \{ w \in \mathbb{R}^3 : w \text{ é tangente a } S \text{ em } p \}.$$

Em particular, T_pS é gerado por $\sigma_u(a)$ e $\sigma_v(a)$.

$\rightsquigarrow$ Derivada: Seja $f: S \to M$ diferenciável. (superfície; subconjunto de $\mathbb{R}^n$) Dado $p \in S$, $V \ni p$ aberto e F, G extensões de f a um aberto $O \supseteq V$ de $\mathbb{R}^3$. Assim
$$dF_p w = dG_p w, \quad w \in T_p S.$$
Então podemos definir derivada como
$$\begin{aligned} df_p : T_p S &\to \mathbb{R}^n \\ w &\mapsto dF_p w. \end{aligned}$$
Logo a derivada de f é dF_p restrito a $T_p S$.

$\rightsquigarrow$ Se $n = 1$, f é um funcional linear em $T_p S$. Pelo Teorema fundamental de Riesz, existe $\nabla f(p)$, chamado de gradiente de forma que $df_p w = \langle \nabla f(p), w \rangle$, $\forall w \in T_p S$.

$\rightsquigarrow$ Ponto crítico: S superfície regular e $f: S \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $df_p \equiv 0$, então p é ponto crítico.

Teorema da função inversa: S_1 e S_2 superfícies regulares e $f: S_1 \to S_2$ diferenciável. Suponha que df_p seja um isomorfismo em $p \in S_1$. Então existem abertos $A_i \subseteq S_i$ com $p \in A_i$, $f(p) \in A_2$ e $f|_{A_1}: A_1 \to A_2$ sendo um difeomorfismo.