Formas Fundamentais

- **Primeira forma fundamental:** S superfície regular e $p \in S$. Seja
$$I_p : T_pS \to \mathbb{R}$$
$$w \mapsto \|w\|^2$$ forma quadrática

Seja σ uma parametrização de S e denote
$$E = \|\sigma_u\|, \quad F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle, \quad G = \|\sigma_v\|$$
Se $w \in T_pS$, com $p = \sigma(u,v)$, então
$$w = a\sigma_u(u,v) + b\sigma_v(u,v).$$
Com isso, $I_p(w) = a^2E + 2abF + b^2G(u,v)$ e a representação matricial de I_p é
$$\begin{bmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{bmatrix}.$$

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}\, dt$$

Seja $R \subset \sigma(U)$. A área de R é
$$\mu(R) = \int_{\sigma^{-1}(R)} \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv$$
Pelo Teorema da Mudança de Variáveis, $\mu(R)$ não depende da parametrização σ de S. Note que vale
$$\mu(R) = \int_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2}\, du dv.$$

- **Superfícies Orientáveis:** Para todo ponto $p_0 \in S$, existe uma vizinhança em que é possível definir $\tilde{N}(p) = \sigma_u(\sigma^{-1}(p)) \times \sigma_v(\sigma^{-1}(p))$ e, com S regular $N(p) = \tilde{N}(p)/\|\tilde{N}(p)\|$, que é normal e unitário a S em p.

S é dita orientável se existe N diferenciável e N é a orientação de S.

⇝ Toda superfície regular é localmente orientável

⇝ Uma superfície regular S é orientável se, e só se, admite um atlas coerente, isto é, para cada par de parametrizações σ e $\tilde{\sigma}$ que cobrem um ponto $p \in S$ em comum, a mudança de parâmetro $\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma$ tem determinante jacobiano positivo em $\sigma^{-1}(p)$.

Toda superfície regular compacta é orientável
↳ Teo. Separação de Jordan-Brouwer

- Segunda Forma Fundamental:

Aplicação normal de Gauss: $N: S \to S^2$, em que N é um campo normal unitário diferenciável em S (regular, orientável). Note que dN_p é um operador autoadjunto de T_pS

⇝ esfera

Curvaturas principais: Autovalores de $-dN_p$
Direções principais: Autovetores de $-dN_p$.
Curvatura média: $H(p) = 1/2\, tr(-dN_p)$
Curvatura Gaussiana: $K(p) = det(-dN_p)$ → invariante à orientação de S

Superfícies totalmente umbílicas: Quando para todo ponto $p \in S$, $k_1(p) = k_2(p)$. Nesse caso, se S é conexa e orientável, então S está contida em um plano ou uma esfera.

Segunda forma fundamental: seja S regular orientável e N aplicação de Gauss. $II_p(w) = \langle -dN_p w, w \rangle$ é a 2ª forma fundamental.

Seção normal: $p \in S$ e N aplicação de Gauss. A seção normal de S em p definida por $w \in T_pS$ é a intersecção de S com o plano $\Pi_w + p$, com $\Pi_w = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, N_p \times w \rangle = 0\}$.

$$e = \langle -dN_p \sigma_u, \sigma_u \rangle,$$
$$f = \langle -dN_p \sigma_u, \sigma_v \rangle$$
$$g = \langle -dN_p \sigma_v, \sigma_v \rangle$$

são os coeficientes de II_p. Sejam

$$M_1 = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix},$$

$$M = M_1^{-1} M_2.$$

Temos que

$$K \circ \sigma = \det(M) \quad \text{e} \quad H \circ \sigma = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(M).$$