Curvas e Superfícies, FGV/EMAp 2022 Lista 2 #
Asla Medeiros e Sá (data de entrega: 07/03/2022), monitor: Lucas Moschen

Tópicos: *reparametrização*, *comprimento de uma curva*, *comprimento de arco*. **Sugestão**: Desenhe, sempre que possível, as curvas e a animação da trajetória do ponto em ambiente computacional para ampliar o entendimento do exercício para além da habilidade algébrica.

---

1. Desenhe em ambiente computacional, utilizando sistemas de computação simbólica, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo as seguintes parametrizações da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\gamma(t) = (t^3, t^6)$. Mostre que α é curva regular e γ não é regular. Qual seria a função naturalmente candidata a ser uma reparametrização entre as duas parametrizações? Porque falha?

2. Mostre que as curvas regulares $\alpha(t) = (t, e^t), t \in \mathbb{R}$ e $\beta(s) = (log(s), s), s \in (0, \infty)$ têm o mesmo traço.

3. Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

   a. $\alpha(t) = \big(3\cosh 2t, 3\sinh 2t, 6t\big), \quad t \in [0, \pi]$.
   b. Catenária: $\gamma(t) = (t, cosh(t))$, a partir do ponto $(0, 1)$.

4. *Mudanças de parâmetro:*

   a. Demonstrar que $s(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$ é uma mudança de parâmetro diferenciável que tranforma o intervalo $(0, \infty)$ no intervalo $(0, 1)$.
   b. Mostrar que a função $\lambda : (-1, 1) \to (-\infty, +\infty)$ definida por $\lambda(t) := \tan(\pi t/2)$ é uma mudança de parâmetro.
   c. Provar que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma tal que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.

5. Provar que a curva
$$\gamma(t) = \left(2t, \frac{2}{1 + t^2}\right)$$
com $t > 0$ é regular e é uma reparametrização de
$$\alpha(t) = \left(\frac{2\cos t}{1 + \sin t}, 1 + \sin t\right), \quad t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

6. Seja $\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$. Reparametrizar α pelo comprimento de arco.

7. Mostre que, se todas as retas tangentes a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em uma reta.

8. Mostre que, se todas as retas normais a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em um círculo.