Curvas e Superfícies, FGV/EMAp 2022 Lista 3 #

Asla Medeiros e Sá (data de entrega: 18/03/2022), monitor: Lucas Moschen

Tópicos: *reparametrização por comprimento de arco*, *curvatura*, *Diedro de Frenet*, *diferenciabilidade de aplicações.*

---

1. Verifique a regularidade e calcule o comprimento de arco e a curvatura das seguintes curvas, quando possível:
   - (retas) $\alpha(t) = (a + ct, b + dt), t \in \mathbb{R}$;
   - $\alpha(t) = (t, t^4), t \in \mathbb{R}$;
   - (círculos) $\alpha(s) = (a + r.cos(s/r), b + r.sen(s/r)), s \in \mathbb{R}$, $r > 0$;
   - (cardióide) $\alpha(t) = (cos(t).(2cos(t) - 1), sen(t).(2cos(t) - 1)), t \in \mathbb{R}$;
   - (catenária) $\alpha(t) = (t, cosh(t)), t \in \mathbb{R}$.
2. Considere a elipse $\beta(t) = (acos(t), bsen(t)), t \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$. Obtenha os valores de t onde a curvatura de β é máxima e mínima.
3. Seja $I = (-a, a), a > 0$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, o qual é simétrico com respeito à origem. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco.
   - Mostre que $\beta : I \to \mathbb{R}^2$, em que $\beta(s) = \alpha(-s)$, é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco e que satisfaz $k_\beta(s) = -k_\alpha(-s) \forall s \in I$ (Isto é, *a curvatura de uma curva plana muda de sinal quando se inverte a sua orientação*)
   - Desenhe em ambiente computacional um par de parametrizações de uma curva que ilustre o fato demonstrado no ítem anterior.
4. Reproduza, no ambiente computacional de sua preferência, os vetores α' e α'' para uma curva α de sua preferência com duas parametrizações distintas, sendo uma a parametrização por comprimento de arco. Use como referência o arquivo `.gbb` mostrado em aula.
5. Reproduza, no ambiente computacional de sua preferência, a representação gráfica da *Tangente Indicatrix*, conforme exemplificado no arquivo `.ggb` apresentado em aula. Teste com a curva de sua preferência.

6. Considerando o conceito de derivada como aproximação linear. Considere a aplicação:

$$f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to (x^3 + y^3, x^3 - y^3)$$

determine suas derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$.

7. Uma aplicação $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dita um *movimento rígido* quando preserva distâncias. Isto é:

$$\|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\|$$

Verifica-se que todo movimento rígido se escreve de forma única como composta de uma transformação linear ortogonal e uma translação, ou seja:

$$\Phi(p) = A.p + p_0 \forall p \in \mathbb{R}^2,$$

em que, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador linear ortogonal e p_0 um ponto de $\mathbb{R}^2$. Diz-se que Φ é *direto* ou *inverso*, conforme $det(A) = 1$ ou -1 respectivamente. Verifique que Φ é diferenciável e calcule $\Phi'(p)$ e $\Phi''(p)$

8. Mostre que uma matriz de rotação e uma matriz de reflexão são aplicações lineares ortogonais e, portanto, podem ser interpretadas como um movimento rígido.

9. Mostre que movimentos rígidos levam retas em retas e círculos em círculos.

10. Exemplifique, em ambiente computacional, movimentos rígidos sendo aplicados em uma curva de sua preferência.