

Tópicos: *curvas em \mathbb{R}^3 , curvatura e torção, triedro de Frenet, equações de Frenet.*

1. Verifique se as seguintes curvas são 2-regulares:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

(b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t), t \in \mathbb{R}$

2. Prove que a aplicação $\alpha(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2.\sin(t/2)), t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro $C = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - 1)^2 + y^2 = 1$ e da esfera $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Desenhe a curva α , o cilindro C e a esfera S em ambiente computacional.

3. Obtenha uma reparametrização por comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = (e^t.\cos(t), e^t.\sin(t), e^t), t \in \mathbb{R}$$

4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que $\|\alpha'(t)\|$ é constante se, e só se, $\forall t \in I, \alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$. Em particular, mostre que $\|\alpha'(t)\|$ é constante para a hélice circular $\alpha(t) = (a.\cos(t), a.\sin(t), b.t), t \in \mathbb{R}$.

5. Em ambiente computacional, desenhe as seguintes curvas e produza uma animação do triedro de Frenet de cada curva:

(a) $\alpha(t) = (4.\cos(t), 5 - 5.\sin(t), -3.\cos(t)), t \in \mathbb{R}$

(b) $\beta(t) = (1 - \cos(t), \sin(t), t), t \in \mathbb{R}$

6. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular, a qual, não é, necessariamente, parametrizada por comprimento de arco. Prove, então, que

$$k_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

em que \times denota o produto vetorial.

7. Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

(b) $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t), t \in \mathbb{R}$

8. Seja $\alpha(t)$ uma curva 2-regular:

(a) Verifique que $\alpha''(t)$ é paralelo ao plano osculador de α em t .

(b) Prove que o plano osculador de α em t_0 é dado pelos pontos P de \mathbb{R}^3 tal que $\langle P - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0) \rangle = 0$.

9. Desenhe em ambiente computacional as curvas e seus planos normal e osculador em função do parâmetro:

(a) $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3), t \in \mathbb{R}$

(b) $\beta(t) = (a \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(t), a \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(t), c \cdot \sin(2t)), t \in \mathbb{R}$

10. Verifique que o vetor binormal de uma hélice circular forma um ângulo constante com o eixo do cilindro sobre o qual está a hélice. Ilustre o fato em ambiente computacional.

11. Prove que a aplicação

$$\alpha(s) = \left(\frac{4}{5} \cdot \cos(s), 1 - \sin(s), -\frac{3}{5} \cdot \cos(s) \right), s \in \mathbb{R}$$

é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cujo traço é um círculo. Determine, então, seus centro e raio.