Curvas e Superfícies, FGV/EMAp 2022 Lista 5 #
Asla Medeiros e Sá (data de entrega: 06/05/2021)

Tópicos: *superfícies regulares*, *superfícies parametrizadas regulares.*

Definição [Superfícies C^k, suave, regular]: Lembremos que a *Matriz Jacobiana* ou *Jacobiano* de $f\colon S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ no ponto $x \in S$ é a matriz $m \times n$ dada por:

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Uma superfície diz-se:

- C^k se cada parametrização do atlas é uma função de classe C^k;
- *suave* (ou C^∞) se cada parametrização é C^∞;
- *regular* se para cada $\sigma\colon U \to V$ do atlas e cada $q \in U$, a matriz Jacobiana $J_\sigma(q)$ tem característica 2 (posto 2).

Temos

$$J_\sigma(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \end{pmatrix},$$

onde $\sigma(x,y) = (\sigma_1(x,y), \sigma_2(x,y), \sigma_3(x,y))$. O posto de $J_\sigma(q)$ igual a 2 equivale a que sua coluna sejam linearmente independentes. Isto é, em um ponto regular da superfície temos que os vetores

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q)\right); \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q)\right)$$

são linearmente independentes, isto é:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \neq (0,0,0), \quad \forall q \in U.$$

1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Mostre que: F é injetora se, e só se, a imagem da base canônica de $\mathbb{R}^2$ forma um conjunto de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ ou, equivalentemente, se a matriz associada de F tem posto 2. (obs.: Este resultado é usado para o conceito de superfície parametrizada regular).

2. Mostre que o paraboloide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ é uma *superfície regular*. Desenhe o paraboloide em um ambiente gráfico juntamente com o plano tangente e um vetor normal à superfície. Faça o desenho de forma a poder variar o ponto aonde o plano tangente é exibido.

3. Mostre que, se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de $\mathbb{R}^2$, então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma *superfície parametrizada regular*, que descreve o gráfico da função f. Além disso, é uma *superfície regular* cujo atlas pode ser composto por uma única carta.

4. Considere o *hiperbolóide de uma folha*

   $$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

   Mostre que, para todo θ, a reta

   $$(x - z)cos\theta = (1 - y)sen\theta, (x + z)sen\theta = (1 + y)cos\theta$$

   está contida em S, e que, todo ponto do hiperboloide está em alguma dessas linhas. Desenhe o hiperbolóide e as linhas em um ambiente gráfico. Deduza que a superfície pode ser coberta por uma única parametrização.

5. Considere uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)), s \in I \subset \mathbb{R}$ Seja o subconjunto de R^3 gerado pelas retas que passam por $\alpha(s)$, paralelas ao eixo O_z. Dê uma condição suficiente que deve satisfazer a curva α para que S seja o traço de uma *superfície parametrizada regular.*

6. **Extra:** Mostre que o cilindro circular

   $$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

   pode ser descrito por uma parametrização global, isto é, que existe um atlas composto só por uma única carta. PS.: esse vai com resposta! Vejam no link e desenhem para se convencer:

   https://math.stackexchange.com/questions/1664320/showing-a-circular-cylinder-is-a-surface