Curvas e Superfícies, FGV/EMAp 2022 Lista 7 #
Asla Medeiros e Sá (data de entrega: 28/05/2022 - quarta-feira)

Tópicos: *Topologia*, *conjuntos abertos, fechados, compactos e conexos*, *continuidade e homeomorfismo.*

Conceitos fundamentais que caracterizam espaços topológicos:

- Aula 1:
  - *Bola aberta*: $B(a,r) = x \in \mathbb{R}^n / \ ||x-a|| < r$;
  - *Bola fechada*: $B(a,r) = x \in \mathbb{R}^n / \ ||x-a|| \leq r$;
  - *Esfera*: $B(a,r) = x \in \mathbb{R}^n / \ ||x-a|| = r$;
  - O ponto $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ é *interior* ao conjunto X quando $\exists\ r > 0 / B(a,r) \subset X$;
  - O conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é dito *aberto*, quando $\forall p \in U, \exists\ r > 0 / B(a,r) \subset U$, isto é, todo ponto $p \in U$ é ponto interior, isto é, $A = int(A)$;
  - Um conjunto é dito *limitado* quando existe uma bola que o contém, isto é, $\exists a \in \mathbb{R}^n, r > 0 / X \subset B(a,r)$;
  - Uma *aplicação* $f : A \to \mathbb{R}^m$ é dita *limitada* quando $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ é limitado;
  - Uma *aplicação* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é *aberta* quando $\forall$ aberto $A \subset \mathbb{R}^n, f(A) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto;

.

- Aula 2:
  - PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DOS CONJUNTOS ABERTOS:
    1. O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço $\mathbb{R}^n$ são abertos;
    2. A INTERSECÇÃO de uma família FINITA de abertos é aberta;
    3. A UNIÃO de uma família QUALQUER de abertos é aberta.
  - ESPAÇO TOPOLÓGICO: É um par (X, τ) em que X é um conjunto e τ é uma família de subconjuntos de X, chamados de abertos, que satisfazem as propriedades fundamentais dos conjuntos abertos. Diz-se então que a família τ define uma *topologia* em X;

- TOPOLOGIA E CONVERGÊNCIA:Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ converge para $a \in \mathbb{R}^n \iff \forall\, V$, vizinhança de a em $\mathbb{R}^n$, $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}/\ k > k_0 \Longrightarrow x_k \in V$;
- Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cujo complementar é aberto é dito *fechado*;
- PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DOS CONJUNTOS FECHADOS:
  1. O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço $\mathbb{R}^n$ são fechados;
  2. A UNIÃO de uma família FINITA de fechados é fechada;
  3. A INTERSECÇÃO de uma família QUALQUER de fechados é fechada.
- Aplicação fechada: leva fechados em fechados
- Aderência: um ponto a é aderente a um conjunto X quando existe alguma sequencia de pontos de X que converge para a.
- O *fecho* de X, denotado por $\overline{X}$, é o conjunto de pontos que são aderentes a X.
- Conjuntos fechados caracterizam-se também pelo fato de coincidirem com o seu fecho, isto é, $C \subset \mathbb{R}^n$ é *fechado* $\iff$ o limite de toda sequencia convergente de pontos de C é ponto de C;
- A *fronteira* ou *bordo* de X é o conjunto $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X}$

• Aula 3:
  - Um conjunto fechado C que é também limitado é dito *compacto*;
  - Diz-se que A é um *aberto relativo* de X quando existe um aberto U de $\mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap X$;
  - Uma *cisão* é uma decomposição de um conjunto X em subconjuntos disjuntos cuja união é o próprio conjunto X;
  - Um conjunto é dito *conexo* se a única cisão que admite é a tivial ($X = X \cup \emptyset$);
  - Dois espaços topológicos (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) são *homeomorfos* quando existe uma bijeção $\varphi : X_1 \to X_2$ tal que para quaisquer abertos $A_1 \in \tau_1$, $A_2 \in \tau_2$ tem-se que $\varphi(A_1) \in \tau_2$ e $\varphi^{-1}(A_2) \in \tau_1$. nesse caso, φ é dita *homeomorfismo*.
  - Aplicações são ditas contínuas quando preservam convergência;
  - Teorema: Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, uma bijeção $f : X \to Y$ é um *homeomorfismo* $\iff$ f e f^{-1} são contínuas.

Exercícios:

1. Provar que toda bola aberta $B(x;r)$ é um conjunto aberto.

   Solução: Seja $y \in B(r;x)$. Queremos provar que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(y;\epsilon) \subseteq B(r;x)$. Definimos para isto $\epsilon := r - |y-x| > 0$. Logo, dado qualquer ponto $z \in B(y;\epsilon)$, temos que

   $$|z-x| \leq |z-y| + |y-x| < \epsilon + |y-x| = r - |y-x| + |y-x| = r.$$

   Logo $z \in B(x;r)$. Isto é, $B(y;\epsilon) \subseteq B(x;r)$. Concluímos que $B(x;r)$ é aberto.

2. Provar que $Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0\}$ é aberto. *Dica:* Seja (a,b) no conjunto Z. Seja $\epsilon := \min\{|a|,|b|\} > 0$. Provar que $B((a,b);\epsilon) \subseteq Z$.

3. Provar que união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

   Solução: Seja $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de abertos, onde Λ é um conjunto de índices (possívelmente infinito, não enumerável). Consideremos a união:

   $$A := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

   Seja $z \in A$. Logo $z \in A_\lambda$ para algum índice λ. Dado que A_λ é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z;\epsilon) \subseteq A_\lambda$. Logo $B(z;\epsilon) \subseteq A$. Concluímos que A é aberto.

4. Provar que a interseção de uma quantidade finita de abertos é um conjunto aberto.

5. Provar que a interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado. Será que união de fechados é também fechado? Se não for certo, dar um contraexemplo.

6. O conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}_*\} \subset \mathbb{R}$ é aberto? É fechado?

7. Dê exemplos de conjuntos que não são nem abertos nem fechados.

8. Prove que

   $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

   é aberto.

9. Prove que um conjunto em $\mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, é união de bolas abertas.

10. Prove que as bolas fechadas são conjuntos fechados.

11. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que existe $d > 0$ tal que $\|x-y\| \geq d$ para todo par de pontos $x, y \in A$. Prove que A é fechado em $\mathbb{R}^n$.

12. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto não vazio contido numa reta de $\mathbb{R}^2$. Prove que A não é aberto.

13. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Prove que $\mathbb{R}^n \backslash int(A)$ é fechado.

14. Seja $A \subset B \subseteq \mathbb{R}^n$, e x ponto de acumulação de A. Será que x é também ponto de acumulação de B?

15. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, prove que sua fronteira tem interior vazio.

16. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$. Prove que, dado $a \in \mathbb{R}^n \backslash A$, o conjunto $A \cup \{a\}$ é aberto se, e somente se, a é um ponto isolado da fronteira de A.

17. Prove que se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado então sua fronteira tem interior vazio.

18. Sejam $F \in \mathbb{R}^n$ fechado e $f : F \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua. Mostre que f leva subconjuntos limitados de F em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^m$. Prove, exibindo um contra-exemplo, que não se conclui o mesmo removendo-se a hipótese de F ser fechado.

19. Prove que duas bolas abertas de $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas.

    Solução: Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, consideremos a aplicação:

    $$\begin{aligned} f : B(0,1) &\to B(a,r) \\ x &\to rx + a \end{aligned}$$

    A aplicação f é bijetiva e contínua. Sua inversa, $f^{-1} : B(a,r) \to B(0,1)$, é dada por $f^{-1}(y) = \frac{1}{r}(y - a)$, donde se vê que f^{-1} é contínua, portanto f é um homeomorfismo. Pela transitividade da relação de homeomorfismo, conclui-se que duas bolas bertas quaisquer de $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas. Um argumento análogo prova que vale o mesmo para duas bolas, ambas, fechadas.

20. Verifique que a aplicação:

    $$\begin{aligned} f : B(0,1) &\to \mathbb{R}^n \\ x &\to \frac{x}{1 - ||x||} \end{aligned}$$

    é um homeomorfismo entre a bola aberta unitária $B(0,1)$ e $\mathbb{R}^n$. Conclua que qualquer bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a todo o espaço $\mathbb{R}^n$.

21. Mostre que o cone $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ e $\mathbb{R}^2$ são homeomorfos.