Monitoria 08/03/2022

Reparametrização: como dizer que duas parametrizações são iguais quando tem mesmo traço, mas são representados por funções diferentes.

Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ e $\beta: J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ duas parametrizações.

Dizemos que β é reparametrização de α se existe uma função $h: J \to I$ diferenciável com inversa diferenciável de forma que

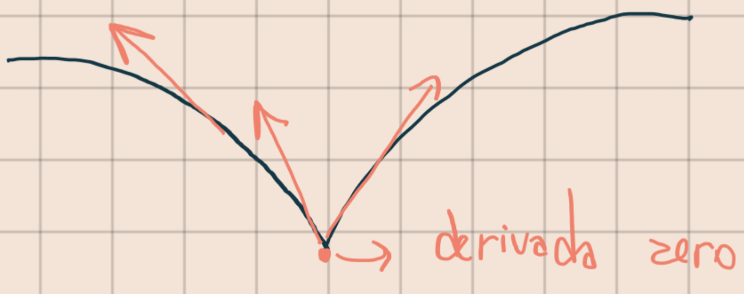
$$\alpha \circ h = \beta,$$

isto é,

$$\forall t \in J, \ \beta(t) = \alpha(h(t)).$$

Chamamos h de mudança de parâmetro ou difeomorfismo.

- α é regular $\iff \|\alpha'(t)\| \neq 0, \forall t \in I \iff \alpha'(t) \neq 0.$



- β é parametrizada pelo comprimento de arco se $\forall t \in J, \ \|\beta'(t)\| = 1.$

- Como reparametrizar α de forma que ela seja de tangente unitário.

Teorema: α é regular se, e somente se, α admite reparametrização pelo comprimento de arco, isto é, existe β unit-speed, tal que $\alpha \circ h = \beta$ para algum difeomorfismo h.

Demonstração: Quero $\|\beta'(t)\| = 1$, $\forall t \in J$, isto é,

$$1 = \left\| \frac{d}{dt} \alpha(h(t)) \right\| = \| \alpha'(h(t)) \cdot h'(t) \| = \| \alpha'(h(t)) \| \cdot |h'(t)|,$$

o que é equivalente a

$$\cancel{|} h'(t) \cancel{|} = \frac{1}{\| \alpha'(h(t)) \| \neq 0}$$

Posso ignorar

Note que essa é uma exigência para a existência de h.

Se f é diferenciável e invertível, com $f'(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

↳ Teorema da função inversa.

Logo $(h^{-1})'(t) = \| \alpha'(t) \|$, isto é,

$$h^{-1}(t) = \int_{t_0}^{t} \| \alpha'(u) \| \, du,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Mas essa é a função comprimento de arco,

$$h^{-1}(t) := s(t) = \int_{t_0}^{t} \| \alpha'(u) \| \, du$$

$\Rightarrow h(r) = s^{-1}(r)$ é nossa função mudança de parâmetro. Como $\| \alpha'(u) \| > 0 \Rightarrow s(t)$ é estritamente crescente e, logo, invertível. Além disso,

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0$$

que implica que s é diferenciável, com inversa diferenciável pelo teorema da Função Inversa.

Por fim:

$$\left\|\frac{d}{dt}\alpha(h(t))\right\| = \|\alpha'(h(t)) \cdot h'(t)\|$$
$$= \|\alpha'(h(t))\| |h'(t)|$$
$$= \|\alpha'(h(t))\| \cdot \frac{1}{\|\alpha'(h(t))\|}$$
$$= 1$$

Portanto, para reparametrizar pelo comp. de arco:

1. Calcular $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| \, du$
2. Calcular a inversa de s, $h(r) = s^{-1}(r)$.
3. Definir $\beta = \alpha \circ h$.