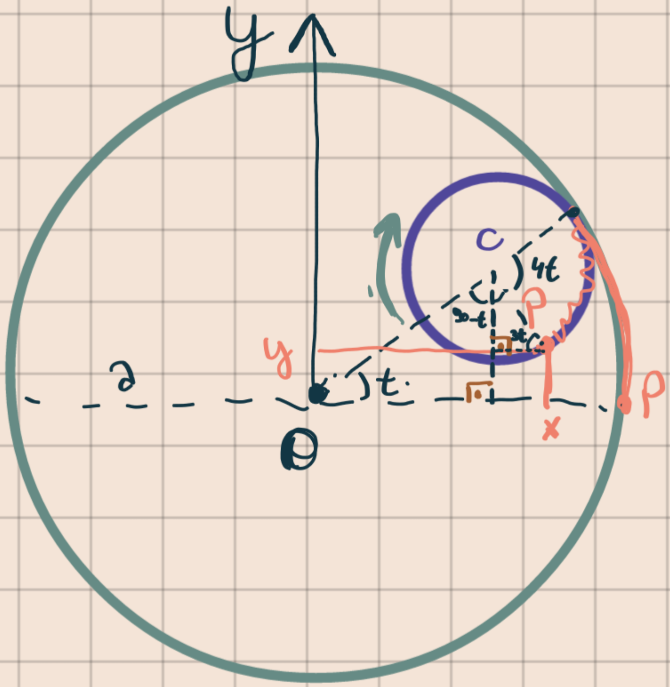
Monitoria 17/02/2022

Exercício: Uma astroide é gerada por uma circunferência de raio $a/4$ que rola dentro de um círculo de raio a. A menor dá uma volta completa e volta ao lugar.



Seja P o ponto que descreve a curva.
Seja t o ângulo entre $\overrightarrow{OP}$ e o eixo x.

Comprimento de arco: $t \cdot a = \phi \cdot a/4 \Rightarrow \phi = 4t$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \cdot 3/4\, a + \cos(3t) \cdot a/4 \\ y(t) = \sin(t) \cdot 3/4\, a - \sin(3t) \cdot a/4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4} a [3\cos t + (\cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t)] \\ &= \frac{1}{4} a [3\cos t + (\cos^3 t - \sin^2 t \cos t - 2\sin^2 t \cdot \cos t)] \\ &= \frac{1}{4} a [\cos^3 t + 3\cos t(1 - \sin^2 t)] \\ &= a \cos^3 t. \end{aligned}$$

De forma equivalente, usando $\sin 3t = \underbrace{\sin 2t}_{=2\sin t \cos t} \cos t + \sin t \underbrace{\cos 2t}_{\cos^2 t - \sin^2 t}$, temos que $y(t) = a \sin^3 t$. Assim $t \in [0, 2\pi]$,

$$\alpha(t) = a(\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Exercício: Sejam p e q pontos e γ uma curva de forma que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Mostre que

$$(q-p)\cdot u \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}\|\,dt$$

para $\|u\| = 1$ e, portanto, $\boxed{\int_a^b \|\dot{\gamma}\|\,dt \geq \|q-p\|.}$

qualquer curva que ligue p a q tem comprimento no mínimo $\|q-p\|$, que é o comprimento do segmento de reta.

$$(q-p)\cdot u = (\gamma(b) - \gamma(a))\cdot u$$

Teorema Fundamental do Cálculo

$$= \int_a^b (\dot{\gamma}(t)\cdot u)\,dt$$

$$\leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\,\cancel{\|u\|}^{\,1}\,dt$$

Cauchy-Schwarz

Tomando $u = \dfrac{q-p}{\|q-p\|}$, $(q-p)\cdot u = \dfrac{(q-p)\cdot(q-p)}{\|q-p\|} = \|q-p\|$,

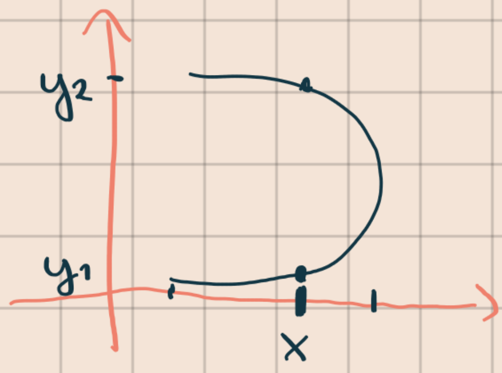
logo $\|q-p\| \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}\|\,dt$

Exercício 8: $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $x'(t) \neq 0$; $t \in I$

Traço de α: $\alpha(I) = \{(x(t), y(t)), t \in I\}$.

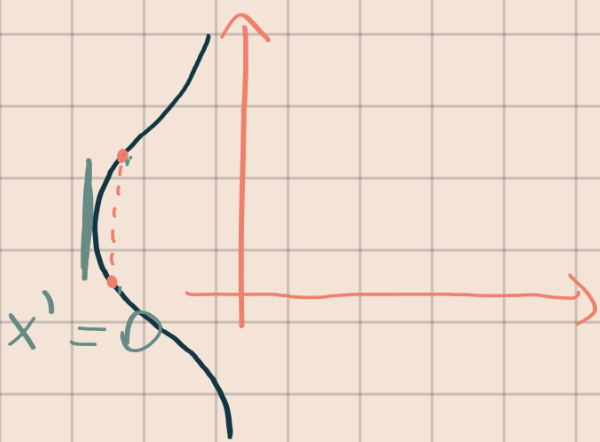
O que é uma função?

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$



Hipótese $x'(t) \neq 0$

O que significa α com $x'(t) = 0$



$t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ e suponha $x(t_1) = x(t_2)$.

Queremos que $y(t_1) = y(t_2)$: uponha que $y(t_1) \neq y(t_2)$.

$x(t_2) - x(t_1) = x'(\xi)(t_2 - t_1)$