Monitoria 29/05/2022

16. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$. Prove que, dado $a \in \mathbb{R}^n\setminus A$, o conjunto $A \cup \{a\}$ é aberto se, e somente se, a é um ponto isolado da fronteira de A.

- Conjunto aberto: A é aberto $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists r>0;\ B(x,r) \subseteq A$
- Fronteira: $x \in \partial A = fr(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset$
- Ponto isolado: x é ponto isolado de A se $x \in A$ e existe $r>0$ tal que $\underline{B(x,r)} \cap A = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$

$A = \bar{B}(a,r) \setminus \{a\}$

$$A \cup \{a\} = \bar{B}(a,r) \setminus \{a\} \cup \{a\} = \bar{B}(a,r)$$

↳ Contraexemplo.

$(\Rightarrow)$ $A \cup \{a\}$ é aberto, $a \notin A$

a é ponto isolado de ∂A

por hipótese $a \in A^C$

(1°) $a \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \boxed{B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset}$ e

$a \leftrightarrow \boxed{B(a,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset} \to$ trivial

$\to B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\exists r>0,\ \boxed{B(a,r) \subseteq A \cup \{a\}} \Rightarrow B(a,r) \setminus \{a\} \subseteq A$

$v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, $y = a + v \cdot \frac{\varepsilon}{2}$, $\|a - y\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$

$\to y \in B(a,\varepsilon) \cap A$

(2°) a é isolado de ∂A Aberto

$$B(a,r) \subseteq A \cup \{a\}$$

Aberto

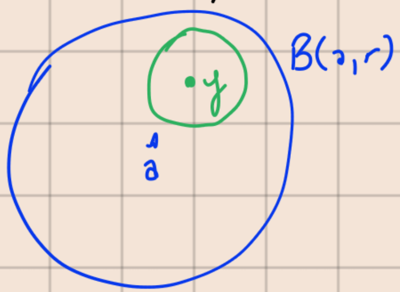
$y \in B(a,r) \setminus \{a\} \subseteq A \subseteq A \cup \{a\}$. Existe $\varepsilon > 0$,

$$B(y,\varepsilon) \subseteq A \Rightarrow y \notin \partial A$$

$$\boxed{\text{Se } y \in B(a,r) \text{ e } y \neq a \Rightarrow y \notin \partial A}$$

$$B(a,r) \cap \partial A = \{a\}$$

De 1 e 2, provamos que a é ponto isolado de ∂A.



$$\exists \varepsilon' ; B(y,\varepsilon') \subseteq A \cup \{a\}$$

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon', \|y-a\|\} > 0 \Rightarrow B(y,\varepsilon) \subseteq A$$

2. $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y<0\} \cup \{(x,y) : x<0, y>0\}$
$= Z_1 \cup Z_2$