Prova A_1 - EDP

Lucas Moschen

1. Descreva as equações características das EDPs

a) $u_t + u_x = 0$

Sejam $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ a curva característica, $z(s) = u(\gamma(s))$, $p(s) = u_x(\gamma(s))$ e $q(s) = u_t(\gamma(s))$.

As equações características são

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{t} = 1 \\ \dot{z} = u_x + u_t = 0 \\ \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ t(0) &= 0 \\ z(0) &= u(x_0, 0) \\ p(0) &= u_x(x_0, 0) \\ q(0) &= u_t(x_0, 0) = -u_x(x_0, 0) \end{aligned}$$

b) $xu_t - tu_x = u$

$$\begin{cases} \dot{x} = -t \\ \dot{t} = x \\ \dot{z} = -t \cdot u_x + x \cdot u_t = z \\ \dot{p} = -u_t + p = p - q \\ \dot{q} = u_x + q = p + q \end{cases}$$

Com essas condições iniciais.

2. Encontre a solução de 1b com $u(x,0) = x$

O sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

tem solução por círculos dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}(s) = e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(s) & -\operatorname{sen}(s) \\ \operatorname{sen}(s) & \cos(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 \cos(s) \\ x_0 \operatorname{sen}(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, \pi/2]$$

Não negatividade de (x,t).

Além disso $\dot{z} = z \Rightarrow z(s) = z_0 e^s = x_0 e^s$. Note que $x^2 + t^2 = x_0^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{x^2+t^2}$. Além disso,

$$\frac{t}{x} = \tan(s) \Rightarrow s = \arctan\left(\frac{t}{x}\right)$$

Logo $u(x,t) = \sqrt{x^2+t^2}\, e^{\arctan\left(\frac{t}{x}\right)}$, $t \geq 0$ e $x > 0$

Se $x = 0$, note que $\lim\limits_{x \to 0} \arctan\left(\frac{t}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, logo

defino $u(0,t) = t e^{\pi/2}$.

3. Já resolvemos essa equação algumas vezes. A condição de salto nos diz que

$$\xi'(t) = \frac{1}{2}(u_- + u_+) = \frac{11}{2}.$$

Assim,

$$u(x,t) = \begin{cases} 10, & x \leq \frac{11}{2}t \\ 1, & x > \frac{11}{2}t. \end{cases}$$

$$h(x) = u(x,5) = 9\, \mathbb{1}\{x \leq 27{,}5\} + 1$$

4. a) Temos $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = f(x)$.
Pelas equações características:

$$x(s) = s + x_0$$
$$t(s) = s$$
$$z(s) = u(x_0, 0) = f(x_0).$$

Assim $x = t + x_0$ e

$$u(x,t) = f(x-t)$$

é solução.

Temos a aproximação à direita

$$\frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} \approx -\frac{u(t,x+k) - u(t,x)}{k}$$

$$\Rightarrow u(t+h,x) = u(t,x) - \frac{h}{k}\left(u(t,x+k) - u(t,x)\right)$$

d) Tudo está relacionado ao fluxo de informação. A derivada à direita usa informação ainda não atualizada para a derivada. Quando $c = -1$, o sentido de informação muda e, portanto, as curvas à direita e à esquerda trocam de papel.