**Exemplo:** $x u_x + (x-1) u_y + x u - e^{x-y} = 0$

$$\mathbf{x} = (x,y)$$
$$\mathbf{p} = (u_x, u_y)$$

Equações características:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\cancel{u_x}^{p_1} - \cancel{u_y}^{p_2} - \cancel{u}^{z} + e^{x-y} - x p_1 \\ \dot{p}_2 = -e^{x-y} - x p_2 \\ \dot{z} = x p_1 + (x-1) p_2 \\ \dot{x} = x \\ \dot{y} = x - 1 \end{cases}$$

Observe que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$

Assim $y(x) = x - \ln|x| + C$, isto é,

$$e^{y} = \frac{1}{|x|} e^{x+C} \Rightarrow |x| e^{y-x} \equiv \text{const.}$$

Note também que $-|x| e^{y-x} \equiv \text{const.} \Rightarrow x e^{y-x} \equiv \text{const.}$

Temos que nas curvas características $(x,y)$ uma relação constante $x e^{y-x} \equiv K$. Defina $t(x,y) = x e^{y-x}$. Também defina $s(x,y) = y - x$. Assim

↳ conveniente escolha!

$$\begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ (1-x)e^{y-x} & x e^{y-x} \end{vmatrix} = e^{y-x} \neq 0, \forall x, y!$$

Isso mostra que $(s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t))$ é localmente injetiva. (Lembra de curvas?)

Considere a transformação de variável

$$v(s,t) := u(x,y) = u(te^{-s}, s+te^{-s})$$

Assim:

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_{t,s}, y_{t,s})(-te^{-s}) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_{t,s}, y_{t,s})(1-te^{-s})$$

$$\Rightarrow \quad v_s = u_x(\underbrace{-te^{-s}}_{-x}) + u_y(1-\underbrace{te^{-s}}_{x})$$

$$= -u_x x - u_y(x-1)$$

$$= xu - e^{x-y} \quad (\text{olhe a EDP})$$

$$= te^{-s}v - e^{s}$$

$$\Rightarrow \quad v_s - te^{-s}v = -e^{-s},$$ que é uma EDO com solução

$$v(s,t) = \frac{1}{t} + f(t)\,e^{-te^{-s}}$$

↳ Na hora de integrar, lembre que temos uma segunda var.

Por fim $$u(x,y) = \frac{e^{x-y}}{x} + \boxed{f}(xe^{y-x})\,e^{-x}$$

$\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ e depende das condições iniciais e contorno.

**Exemplo 2:** $\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases} \end{cases}$

Reescreva como $u_t + \overbrace{\left[\dfrac{u^3}{3}\right]_x}^{=u^2u_x} = 0$

Pelo método das características,

$$\begin{cases} \dot{x} = u^2 \\ \dot{t} = 1 \Rightarrow t(s) = s + \cancelto{0}{t_0} \\ \dot{z} = u^2 u_x + u_t = 0 \\ \dot{p} = -2up^2 \\ \dot{q} = -2upq \end{cases}$$

Assim $z(s) \equiv z_0$. Em particular

$$z(0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$$

Por fim $\dot{x} = z^2(s) \equiv z_0^2 \Rightarrow x(s) = z_0^2 s + x_0$

Concluo que
$$z(t) = u_0(x_0)$$
$$x(t) = z^2(t)\, t + x_0$$

Então $u(x,t) = u_0(x - u^2 t)$

Quando $x_0 < 0$, $x = t + x_0 \Rightarrow x - t < 0$.
Nesse caso $u(t,x) = 1$ ao longo dessas curvas.
Quando $x_0 > 0$, $x = x_0 \Rightarrow x > 0$
Nesse caso $u(t,x) = 0$.

$$u(t,x) = \begin{cases} 1, & x < t \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Note que temos choques quando $0 \leq x < t$

Queremos que

$$\frac{u^{-3}/3 - u^{+3}/3}{u^- - u^+} = \xi'(t)$$

Com a descontinuidade, $u^- = 1$ e $u^+ = 0$. Logo

$$\xi'(t) = \frac{1}{3} \Rightarrow \xi(t) = \frac{1}{3}t + C$$

Além disso essa curva deve passar pela origem $\Rightarrow C = 0$.

Logo a curva é dada por $x = \frac{1}{3}t$

Assim

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < 0 < t \text{ ou } x < 1/3\, t \\ 0, & x > 1/3\, t \end{cases}$$