Equações de Hamiton - Jacobi

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 & \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o hamiltoniano

$$Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

Equações características

$$\begin{cases} y = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ q = (Du, u_t) = (p, p^{(n+1)}) \\ z = u(x,t) \end{cases}$$

EDP

$$G(q, z, y) = p^{(n+1)} + H(p, x) = 0$$

$$\begin{cases} \dot{q} = -D_y G - D_z G \cdot q = -(D_x H, 0) \\ \dot{z} = D_q G \cdot q = (D_p H, 1) \cdot (p, p^{(n+1)}) \\ \dot{y} = D_q G = (D_p H, 1) \end{cases}$$

Logo $\dot{t} = 1 \Rightarrow t(s) = s$ e eu não vou usar s

Assim

Equações Hamilton - Jacobi

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(p(t), x(t)), \quad i = 1, \dots, n \\ \dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(p(t), x(t)), \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Além disso $\dot{z} = D_p H \cdot p + p^{n+1} = D_p H - H$

Só para juntar tudo: Sistema de EDOs

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p(p, x) \\ \dot{p} = -H_x(p, x) \\ \dot{z} = D_p H(p,x)\cdot p - H(p,x) \end{cases}$$

Basta resolvermos esse

$\Downarrow$

Existe Solução Local!

Cálculo das Variações

* (Lagrangiana): $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

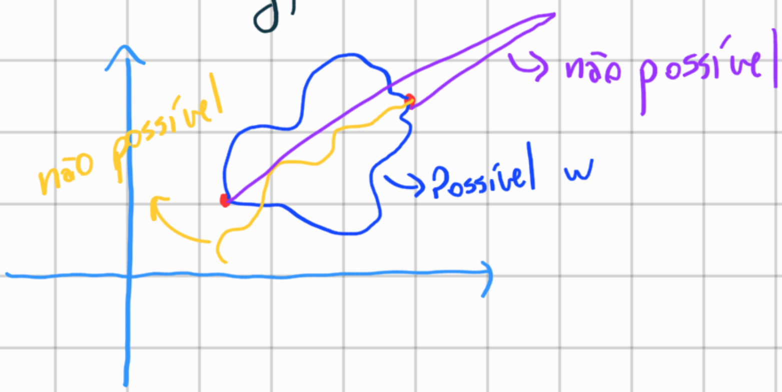
$(v, x) \mapsto L(v, x)$,

em que

$$D_v L = (L_{v_1}, L_{v_2}, \dots, L_{v_n})$$
$$D_x L = (L_{x_1}, L_{x_2}, \dots, L_{x_n})$$

Defina $I[w] = \int_0^t L(\dot{w}(s), w(s))\, ds$,

em que $w(0) = y$, $w(t) = x$ e w é de classe C^2,



O problema do Cálulo das Variações é

$$(P) \quad \min_{w} I[w].$$

Teorema de Euler-Lagrange: Se x minimiza (P), então

$$-\frac{d}{ds}\left(D_v(L(\dot{x}(s), x(s))\right) + D_x L(\dot{x}(s), x(s)) = 0,$$

→ Equações de Segunda ordem

$\forall s \in [0,t]$

↳ Se x resolve essa equação, ela é chamada de ponto crítico

Exemplo: $L(v,x) = \frac{m}{2}\|v\|^2 - \phi(x)$,

$$D_v L(\dot{x}, x) = m\dot{x}$$
$$D_x L(\dot{x}, x) = -D_x \phi(x)$$

Por Euler-Lagrange,

$$-m\ddot{x} + D_x\phi(x) = 0 \Rightarrow m\ddot{x}(s) = D_x \phi(x(s))$$

Tome x que resolva Euler-Lagrange. Defina

$$p(s) = D_v L(\dot{x}(s), x(s))$$

Suponha que $p = D_v(L(v,x))$ seja invertível em v, isto é, existe $v(p)$ tal que $p = D_v L(v(p), x)$ $(*)$

Defina o hamiltoniano $H(p,x) = p \cdot v(p,x) - L(v(p,x),x)$

Podemos provar que (x,p) satisfaz as equações de Hamilton-Jacobi. Além disso,

$$s \mapsto H(p(s), x(s))$$

é constante. ↳ Tem que derivar H e usar Euler-Lagrange

Transformada de Legendre

$$L^*(p,x) = \sup_{v\in\mathbb{R}^n} \{ p\cdot v - L(v,x) \}$$

máximo atingido sob algumas condições

Suponha $L^*(v^*,x) = p\cdot v^* - L(v^*,x)$. Assim

$$0 = \frac{d}{dv}\, p\cdot v - L(v,x)\Big|_{v=v^*} = p - D_v(v^*,x)$$

e, portanto, $p = D_v(v^*,x)$ e o mapa $p = D_v(v,x)$ é invertível. (Olhar (*))

Obs.: Suponha agora que $H(p,x) = H(p)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Note que pela nossa definição

$$H = L^*$$

O interessante é que

$$L = H^* \,!$$

Dizemos que L e H são funções (convexas) duais.

Voltando ao problema...

$$(P^*) \begin{cases} u_t + H(D_u) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Equações características sem x

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p(p,x) \\ \dot{p} = -H_x(p,x) \\ \dot{z} = D_pH(p,x) - H(p,x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = 0 \Rightarrow p(s) \equiv p(0) \\ \dot{z}(s) = D_pH(p(s)) \cdot p(s) - H(p(s)) \\ \dot{x}(s) = D_pH(p(s)) \end{cases}$$

$$\dot{x}(s) = D_pH(p(s)) = \overbrace{D_pH(p(0))}^{\text{não depende de } s}$$

$$\Rightarrow x(s) = D_pH(p(0)) \cdot s + x(0),$$

note que $p(0) = \nabla g(x(0))$.

As curvas características são retas que começam em $t=0$.

$$\dot{z}(s) = \overbrace{D_pH(p_0) \cdot \nabla g(x_0) - H(p_0)}^{L(\dot{x}(s)) = L(D_pH(p_0))}$$

$$\Rightarrow z(s) = (D_pH(p_0) \cdot \underbrace{\nabla g(x_0)}_{= p_0} - H(p_0))s + g(x_0)$$

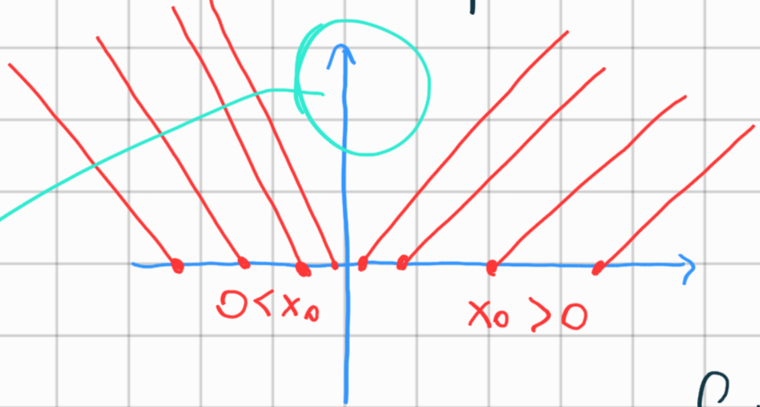
Logo

$$u(x,t) = z(t) = \int_0^t L(\dot{x}(s))\,ds + g(x_0)$$

Exemplo: $\begin{cases} u_t + \frac{1}{2} u_x^2 = 0 \\ u(x,0) = |x| \end{cases}$

$H(p) = \frac{1}{2}p^2$ é o Hamiltoniano.

Equações:
$$\dot{z}(s) = p_0 \cdot p_0 - \tfrac{1}{2}(p_0)^2 = \tfrac{1}{2}(p_0)^2 = \tfrac{1}{2}$$
$$\dot{p}_0(s) = 0$$
$$\dot{x}(s) = p_0 \Rightarrow x(s) = g'(x_0)\, s + x_0$$



Logo $u(x,t) = \frac{1}{2}t + |x-t| = \begin{cases} x - \frac{1}{2}t, & x > t \\ -x - \frac{1}{2}t, & -x < -t \end{cases}$

Não temos informação :(

Próximo passo: Usar o cálulo das variações

$$u(x,t) := \inf_{w} \left\{ \int_0^t L(\dot{w}(s))\, ds + g(w(s)) \right\},$$

com as hipóteses de que H é convexa, $\lim_{|p| \to \infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty$

e g é Lipschitz.

Note que essa vem da ideia das curvas caracte-rísticas, mas poderia ser independentemente definida.

Teorema Hopf-Lax

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, então

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ t L\left(\frac{x-y}{t} \right) + g(y) \right\}$$

A ideia é provar que essa função é solução para

$$u_t(x,t) + H(Du(x,t)) = 0$$