Lista 3 (não precisa entregar)

1)

a) Considere a EDP de primeira ordem linear homogênea $a(x,y) \cdot u_x + b(x,y) \cdot u_y = 0$. Mostre que uma combinação linear de soluções também é uma solução.

b) Considere a EDP de primeira ordem linear (não homogênea) $a(x,y) \cdot u_x + b(x,y) \cdot u_y = c(x,y)$. Mostre que uma combinação afim de soluções também é uma solução.

2) Encontre a solução explícita do problema de valor inicial

a) $u_t + 2u_x = 0$, $u(x,0) = \frac{1}{x^2+1}$

b) $u_t + u \cdot u_t = 0$, $u(x,0) = \operatorname{atan}(x) + 10$

3) Considere a equação $u_t + c \cdot u_x = 0$, com valor inicial $u(x,0) = f(x)$, onde $f(x)$ é uma função diferenciável e integrável e, portanto, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Considere o funcional de "energia" $E(t) = \int_R |u(t,x)|^2 \, dx$.

a) Mostre que $u(x,t) = f(x - ct)$ é uma solução do problema de valor inicial.

b) Mostre que a energia $E(t)$ não se altera com o tempo t,isto é, $E'(t) = 0$.

c) Usando a energia, mostre que a solução descrita em (a) é única.

4) Considere a equação de Burgers $u_t + u \cdot u_x = 0$ com valor inicial $u(0,x) = \begin{cases} 3 & , se\ x \leq 0 \\ 0 & , se\ x > 0 \end{cases}$

Exiba a expressão da solução em $t = 10$, isto é, exiba a expressão de $u(x, 10)$.