Lista 4

1) Calcule as séries de Fourier das funções abaixo (na verdade de suas extensões periódicas...)

a) $a: [-\pi, \pi], a(x) = sen(5x)$

b) $b: [-\pi, \pi], b(x) = sen(5x + \alpha)$

c) $c: [-\pi, \pi], c(x) = \begin{cases} 0 & , se\ x \leq 0 \\ 1 & , se\ x > 0 \end{cases}$

d) $d: [-1, 1], d(x) = x$

2) Considere o vetor $u(x, t)$ como a temperatura no tempo t medida nos vértices de um polígono regular com n lados. Mostre como a “série de Fourier discreta” pode ser usada para resolver a equação de diferenças parcial (análoga à equação contínua $u_t = u_{xx}$)

$$u_t(x, t) = u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)$$

com $u(x, 0) = u_0(x)$

3) Resolva o problema de valor inicial $u_t + c \cdot u_x = 0$, com $u(x, 0) = f(x)$, onde $f(x)$ é periódica com período 2π

4) Use a série de Fourier (ou separação de variáveis) para determinar a solução da equação da onda com extremos fixos

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u_t = 0 \\ u(x, 0) = sen(5x) \end{cases}$$

Computacional

1) Afinador de Fourier: escreva um programa que tem como entrada um arquivo de áudio digital no formato .wav e devolve a tonalidade dominante (a frequência dominante em hertz ou a nota musical dominante). Teste com o arquivo de áudio CordaViolao.wav em anexo a esta lista.

Lembrete: a “série de Fourier discreta” ou transformada de Fourier discreta - DFT consiste na escrita do vetor u na base ortonormal de Fourier $[f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n]$, que são as colunas da matriz

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & \ldots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & \ldots & (w^{N-1})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & (w^2)^{N-1} & (w^3)^{N-1} & \ldots & (w^{N-1})^{N-1} \end{pmatrix}$$

A FFT de um vetor u são os coeficientes de u nesta base de Fourier na ordem como aparecem na matriz acima.

2) O arquivo Polvo.csv em anexo contém uma sequência de pares ordenados (x_i, y_i) que representam uma curva fechada no plano. (Você pode usar outra sequência de pontos que represente uma curva no plano, se quiser).

a) Plote a curva obtida pelos pontos (x_i, y_i).
b) Os vetores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_{1,}y_2, \ldots, y_n)$ podem ser vistas como uma “funções discretas” periódicas. Use a equação do calor (ou outro método para filtrar altas frequências de sua preferência) para produzir sequências $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ e $(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ que sejam versões suavizadas das sequências. Plote as curvas para pelo menos 3 valores diferentes de t.

Lembrete – equação do calor em “grafos circulares”.
A equação do calor em grafos é um sistema de EDOs

$$\vec{u}_t = -c \cdot L\vec{u}$$

cuja solução é

$$\vec{u}(t) = e^{-c \cdot t \cdot L} \cdot \vec{u}_0$$

Então, a solução do problema (2) pode ser alcançada usando exponenciais de matrizes, sem apelar para transformada de Fourier. A matriz $e^{-c \cdot t \cdot L}$ é o Núcleo do Calor discreto.
Mas é possível escrever a solução através dos autovalores da matriz do laplaciano L, que são exatamente os coeficientes de Fourier de $-c \cdot t \cdot [2, -1, 0, 0, \ldots, -1]$
A “série de Fourier” de x(t) e y(t), ou mais precisamente, a fft desses vetores, fornece outras maneiras de filtrar as altas frequências de x(t) e y(t). Você pode querer experimentar outros filtros “passa baixa”.