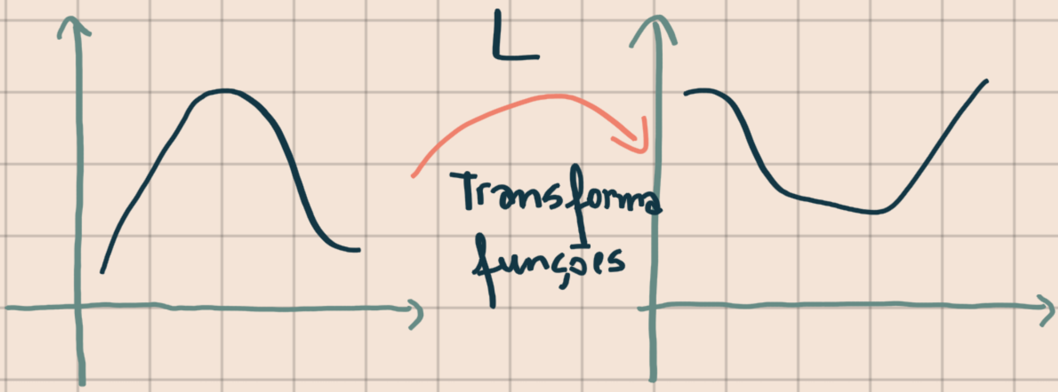
Monitoria EDP
28/10/2021

Convolução

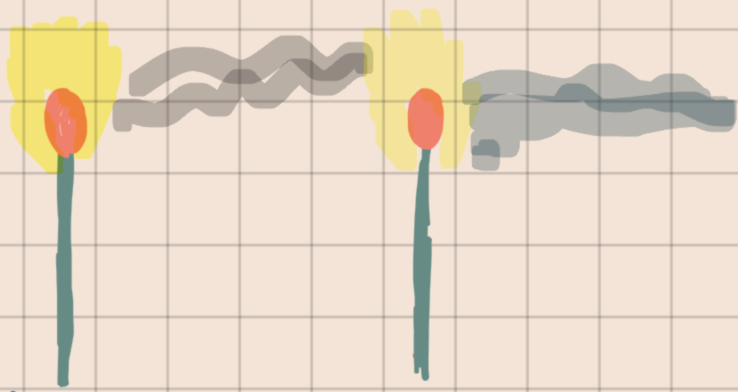
$$L: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$
$$f \mapsto L(f),$$

$f: A \to B$ é uma função. Usualmente, $A = B = \mathbb{R}$.

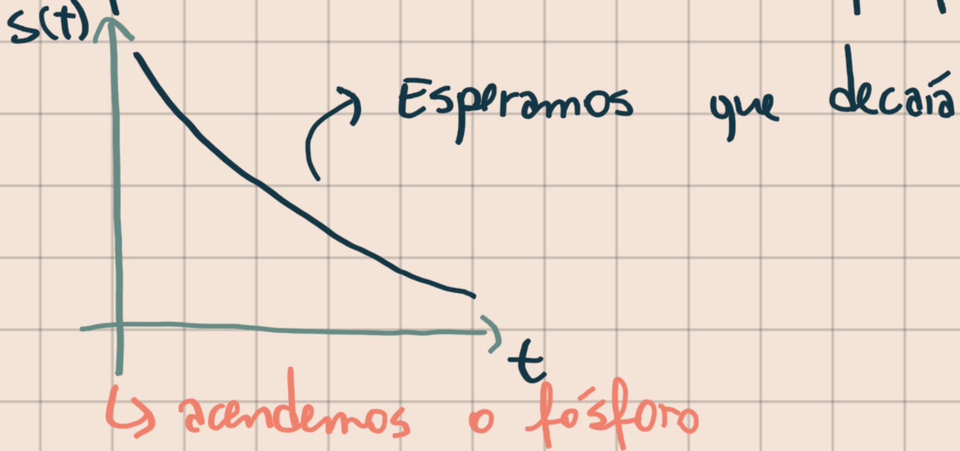


Convolução: $(Lf)(x \quad \int_{\mathbb{R}} f(u)\,h(x-u)\,du$

Exemplo:



$s(t)$ = fumaça no ar em t de um fósforo.



$f(t) = \#$ fósforos acesos em t.

Quanta fumaça ainda resta? Suponha que acendemos um fósforo a cada minuto:

$$S^{\text{Total}}(t) = \overbrace{f(t)}^{\#\text{ fósforos em } t} \cdot \overbrace{S(0)}^{\text{fumaça gerada}} + \overbrace{f(t-1)}^{\text{fósforos que estavam acesos 1 min atrás...}} \cdot S(1) + \dots$$

Autovalor e autovetor.

Seja L_h a convolução por h,

$$(L_h f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\,h(x-u)\,du.$$

Quais os autovetores dessa transformação, isto é, qual função g satisfaz $\forall x$,

$$(L_h g)(x) = \lambda\, g(x),$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tomando $w \in \mathbb{R}$, $e_w(x) := e^{2\pi w x i}$ é autovetor de L_h independente de h, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} e_w(u)\,h(x-u)\,du = \lambda_w\, e_w(x), \quad \forall x;$$

em que $\lambda_w = \hat{h}(w) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(u)\, e^{-2\pi w u i}\, du$

Podemos escrever

coeficientes de f escrita na base $\{e_w(x)\}_{w \in \mathbb{R}}$.

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \boxed{\hat{f}(w)}\, e^{2\pi w x i}\, dw$$

Dimensão infinita

Acontece que $\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2\pi w u i} du$ é a transforma de Fourier.

Ou seja, a Transformada de Fourier é o conjunto de coeficientes da ção f na base dos autoveto-res da convolução.

Existem formas diferentes de derivar a Transformada de Fourier que chegam em fórmulas distintas, mas a ideia é a mesma, a mais de constante

Quando f é periódica com período 2π e contínua por partes, podemos definir a transformada de Fourier como a sequência $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, em que

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-ikx) dx$$

A série de Fourier é $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$

De forma geral, $c_n = \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)$, T é o período de f.

Questões da Lista

1) A série da uma função é

uma extenção do pedaço em verde para $P \neq 2\pi$ e qualquer

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \hat{f}(w) e^{i \frac{2\pi}{P} w x},$$

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{P} w x} dx$$

Para a, b, c, $P = 2\pi$,
d, $P = 2$

No caso da a),

$$\hat{a}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(5x) \overbrace{e^{-iwx}}^{\cos(wx) - i\operatorname{sen}(wx).} dx$$

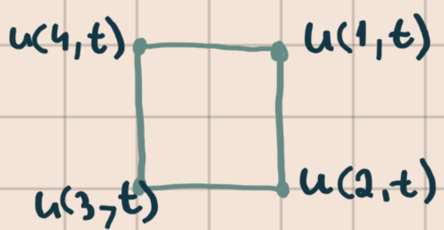
Prove

Note que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(px)\cos(qx) = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(px)\operatorname{sen}(qx) = 0 \Leftrightarrow p \neq q.$$

Isso facilita as contas.

2) Considere $n = 4$



À direita — À esquerda

$$u_t(x,t) = u(\underbrace{x+\Delta x}, t) - 2u(x,t) + u(\underbrace{x-\Delta x}, t)$$

Como são 4 pontos:

$$\begin{bmatrix} u_t(1,t) \\ u_t(2,t) \\ u_t(3,t) \\ u_t(4,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1,t) \\ u(2,t) \\ u(3,t) \\ u(4,t) \end{bmatrix}$$

↳ Pesquisar por Circulant Matriz

Quem são os autovetores dessa matriz?

A M riz de Fourier Discreta!

Ela pode ser facilmente computada a partir do metodo Fast Fourier Transform (FFT).

Seja C matriz circulante,

$$C = FDF^{-1} = F\frac{D}{n}\bar{F}$$

$$Cx = F\frac{D}{n}\bar{F}x = fft\left(\frac{D}{n}\, ifft(x)\right),$$

em que $D = fft(C_1)$.

3 e 4) Usar propriedade da derivada da transformada Fourier:

$$\hat{f}'(w) = iw\hat{f}(w)$$

Logo $\hat{u}_x(w) = iw\hat{u}(w)$.

Em particular, $\hat{u}_t(w,t) + c\,\hat{u}_x(w,t) = 0$, mas $\hat{u}_x(w,t) = iw\hat{u}(w,t)$ e logo

$$\hat{u}_t(w,t) = -ciw\,\hat{u}(w,t)$$

EDO 1ª ordem com variável $\hat{u}$

Após encontrar $\hat{u}(w,t)$, usar a transformada inversa.

Computacionais

1) Aplicar fft no sinal e pegar as intensidades das frequências. Pesquisar a técnica Harmonic Product Spectrum para deixar mais preciso a escolha da nota.

2) Usar a ideia $u_t = -cLu$ que tem solução

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-ctL} u_0 \\ &= F e^{-ctD} F^{-1} u_0 \\ &= \mathrm{fft}(e^{-ctD}\, \mathrm{ifft}(u_0)) \end{aligned}$$