Monitoria 19/08/2022

Existência e unicidade.

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, derivada contínua,

IVP $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Teorema Fundamental do Cálculo

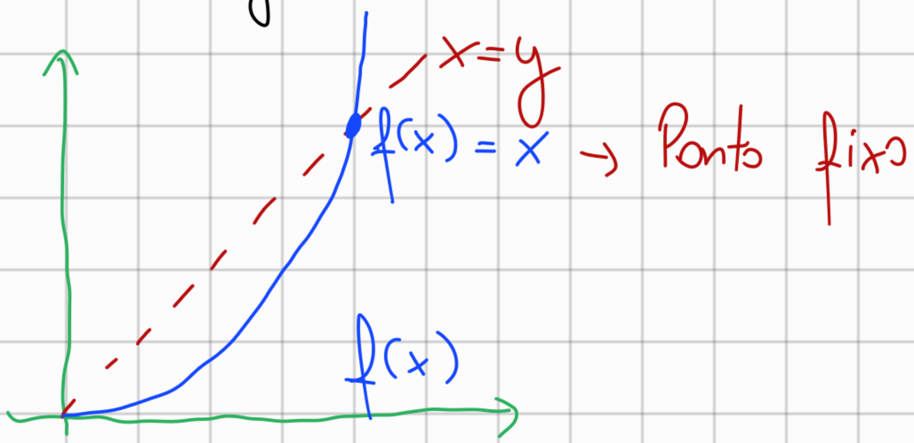
$\leadsto$ Teorema de Picard-Lindelöf

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))\, ds$$

- $L : C^1(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$ (operador)

$$L(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))\, ds$$

Quero provar $y(t) = L(y(t))$ (Ponto Fixo)



$$x \xrightarrow{f} f(x) = x \xrightarrow{f} f(x) = x \to \dots$$

$$L(y(t)) = y(t)$$

- Teorema do Ponto Fixo de Banach

> $T: X \to X$ é uma contração
⇝ Existe $x^* \in X$, $T(x^*) = x^*$

$$\phi_0 \in C^1(\mathbb{R}),$$

$$\phi_n(t) = T(\phi_{n-1})(t), \quad n \geq 1$$

$$\phi_n \xrightarrow{n \to \infty} \phi^* = T(\phi^*)$$

$$d(T(x), T(y)) \leq q\, d(x,y), \quad q \in [0,1)$$

- $\boxed{d(f, g)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$
- $X = [y_0 - a, y_0 + a] = B(y_0; a)$

Como provar que a integral (derivada contínua) é uma contração?

$$y_1, y_2 \in C^1(\mathbb{R}), \qquad y_1(0) = y_2(0) = y_0,$$

$$X = [y_0 - a, y_0 + a], \quad \Upsilon = [-b, b]$$

$$|L(y_1)(t) - L(y_2)(t)| = \left| \cancel{y_0} + \int_0^t f(y_1(s))\,ds - \cancel{y_0} - \int_0^t f(y_2(s))\,ds \right|$$

$$= \left| \int_0^t \Big(f(y_1(s)) - f(y_2(s)) \Big)\,ds \right|$$

$$\overset{TVM}{=} \left| \int_0^t f'(\xi(s))(y_1(s) - y_2(s))\,ds \right|$$

$$\leq \int_0^t |f'(\xi(s))|\,|\overbrace{y_1(s) - y_2(s)}|\,ds$$

$$\leq \int_0^t M \sup_{s \in \mathbb{R}} |y_1(s) - y_2(s)|\,ds$$

$$= M t\, d(y_1, y_2)$$

$$\leq M b\, d(y_1, y_2)$$

$$\leq c\, d(y_1, y_2), \quad c < 1$$

$$\Rightarrow d(L(y_1), L(y_2)) \leq c\, d(y_1, y_2), \quad c < 1$$

- $L : C^1(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$

$$\phi : [-b, b] \longmapsto [y_0 - a, y_0 + a]$$

$$L(\phi) : [-b, b] \longmapsto [y_0 - a, y_0 + a] \Leftarrow \text{Tem que valer}$$

Exemplo: $\begin{cases} x_1 \underbrace{\boxed{u_{x_2}}}_{p_2} - x_2 \overbrace{\underbrace{\boxed{u_{x_1}}}_{p_1}}^{\text{Linear}} = \overset{z}{\boxed{u}}, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \\ u = g, & x_1 > 0,\ x_2 = 0 \end{cases}$

Vamos montar o sistema de EDOs:

$$\dot{x}_1(s) = \frac{\partial F}{\partial p_1} = -x_2 \quad \Big| \quad \dot{p}_1(s) = -\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot p_1 = -p_2 + p_1$$

$$\dot{x}_2(s) = \frac{\partial F}{\partial p_2} = x_1 \quad \Big| \quad \dot{p}_2(s) = -\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot p_2 = -p_1 + p_2$$

$$\dot{z}(s) = \frac{\partial F}{\partial p_1} \cdot p_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} \cdot p_2 = -x_2 \cdot p_1 + x_1 \cdot p_2 = z(s)$$

Com isso $z(s) = z(0)\, e^s$. Além disso,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\text{Autovalores complexos}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como os autovalores são $\pm i$, as soluções são da forma

$$\begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(s) - c_2 \sin(s) \\ c_1 \sin(s) + c_2 \cos(s) \end{pmatrix}$$

Seja $x_1(0) = x^0$, $x_2(0) = 0$ o início da curva em Γ. Assim,

$$x_1(s) = x^0 \cos(s) \longrightarrow \text{semi círculos de raio } x^0$$
$$x_2(s) = x^0 \sin(s)$$

Além disso, $z(0) = u(x_1(0), x_2(0)) = u(x^0, 0) = g(x^0)$.
Escreva $x^0 = \sqrt{x_1 + x_2}$ e $s = \arctan(x_2/x_1)$ e teremos
$u(x_1, x_2) = g((x_1+x_2)^{1/2})\, e^{\arctan(x_2/x_1)}$ como solução.

Soluções integrais

⇝ Equação das características nem sempre encontra uma solução suave. Logo, o que significa
$$u_t + [F(u)]_x = 0 ?$$

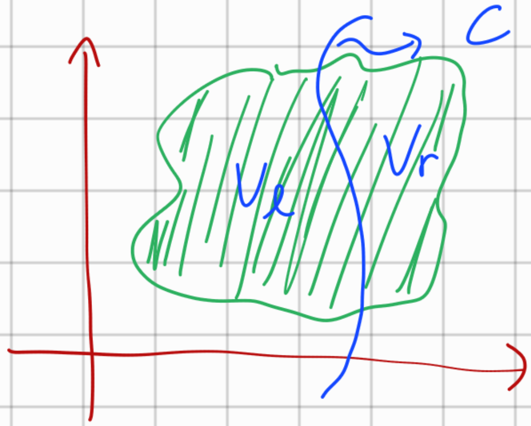
⇝ Seja $v : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ suave com suporte compacto.

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + [F(u)]_x)\, v \, dx\, dt$$

Por partes
$$= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t \, dx\, dt - \int_{-\infty}^\infty \cancel{u}^{\,g}\, v \, dx \Big|_{t=0} - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u) v_x \, dx\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t + F(u) v_x \, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty g v \, dx \Big|_{t=0} = 0$$

⇝ Chamamos u de solução integral

⇝ 

u é suave em V_ℓ e V_r, mas não ao longo da curva C.

Seja $C = \{(x,t) : x = s(t)\}$. Logo

$$F(u_\ell) - F(u_r) = \dot{s}(u_\ell - u_r)$$

ao longo da curva C.

Exemplo:

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{u^2}{2}\right)_x \overset{u \cdot u_x}{=} 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Método das Características

$$\dot{t}(s) = 1 \Rightarrow t(s) = s$$
$$\dot{x}(t) = u = z(t)$$
$$\dot{z}(t) = u_t + u \cdot u_x = 0 \Rightarrow z(t) \equiv z(0)$$

ao longo das curvas $(z(0)t + x(0), t)$. Faça $x(0) = x^0$. Além disso $z(0) = u(x(0), t(0)) = g(x^0)$. Com isso, a solução ao longo das curvas

$$(g(x^0)t + x^0, t) \rightsquigarrow x^0 = x - g(x^0) \cdot t$$

é constante e igual a $g(x^0)$

Com isso, a solução é

$$u(x,t) = g(x - g(x^0)t)$$

- $x_0 \leq 0$, $g(x^0) = 1 \Rightarrow x = t + x_0 \leq t$. Assim $u(x,t) = g(x-t) = 1$

- $0 \leq x_0 \leq 1$: $g(x^0) = 1 - x^0 \Rightarrow x = (1-x^0)t + x^0 \in [t, 1]$
$$\Rightarrow x^0 = (x-t)/(1-t)$$
Aí temos $u(x,t) = 1 - (x-t)/(1-t) = (1-x)/(1-t)$

- $x_0 \geq 1$: $g(x^0) = 0 \Rightarrow x = x^0 \geq 1$,
$$u(x,t) = g(x) = 0$$

Com isso, $u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t}, & x \in [t,1] \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$

Note que se $t<1$ não há choques: $x_1 \neq x_2$,

$$x_1 + g(x_1)t = x_2 + g(x_2)t$$

Se $x_1, x_2 \geq 1$ ou $x_1, x_2 \leq 0$, $x_1 = x_2$.
Se $x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 1$ ou $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 0$,

$$|t| = |x_1 - x_2| \geq 1$$

Se $x_1 \leq 0$, $x_2 \in [0,1]$ (ou $x_2 \leq 0$, $x_1 \in [0,1]$)

$$x_1 + \cancel{t} = x_2 + (\cancel{1} - x_2)t \Rightarrow t = \frac{x_2 - x_1}{x_2} = 1 - \frac{x_1}{x_2} \geq t$$

Se $x_1 \geq 1$, $x_2 \in [0,1]$ (ou $x_2 \geq 1$, $x_1 \in [0,1]$)

$$x_1 = x_2 + (1-x_2)t \Rightarrow t = (x_1 - x_2)/(1-x_2) \geq 1$$

Agora, se $t \geq 1$, observamos que há choques.
Qual a curva de choques? Rankine-Hugoniot:

$$F(u_l) - F(u_r) = \dot{s}(u_l - u_r) \Rightarrow \dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

Note que $x \leq 0$, $u(x,t) = 1$, $t \geq 1$.
$x \geq 1$, $u(x,t) = 0$

Assim, $u_l = 1$ e $u_r = 0 \Rightarrow \dot{s} = \frac{1}{2} \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}t + K$
Mas $s(1) = 1$, pois as descontinuidades passam por $(1,1)$.
Logo $s(t) = (1+t)/2$.