Equações Diferenciais Parciais 2022.2
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva
Monitor Lucas Machado Moschen

Lista 1

Exercício 1 Indique quais das equações abaixo são lineares

(a) $y^m y'' + (y')^{2m} = t^2 y^2$

(b) $y'' + ty' + t^2 y = t^3$

(c) $y'' y' + y^4 - ty = t^2$

(d) $y' + \sin(t) y = 0$

Por definição, uma equação linear diferencial é um polinômio linear na função desconhecida (no caso y) e nas suas derivadas por conseguinte. Ela tem a forma:

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{\partial y}{\partial t} + a_2(t)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \cdots + a_n(t)\frac{\partial^n y}{\partial t^n} + b(t) = 0, \tag{1}$$

em que $a_i(\cdot), i = 1, \ldots, n$ e $b(\cdot)$ são funções arbitrárias diferenciáveis. Por esse motivo, observe que a letra (a) e (c) são altamente não lineares devido ao termos de grau maior que 1 y^m e y^4, respectivamente. Já as letras (b) e (d) são bem comportadas como descrito acima (1).

Exercício 2 Exiba duas soluções do problema de valor inicial $y' = y^{2/3}$ com $y(0) = 0$. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for diferenciável com derivada contínua, então o problema de valor inicial $y' = f(y)$ com $y(0) = y_0$ tem uma única solução na vizinhança de y_0.

A ideia é observar que $f(y) = y^{2/3}$ são é diferenciável na origem. De fato $f'(y) = \frac{2}{3}y^{-1/3}$ que não é definido quando $y = 0$. Desta forma, o teorema da existência é garantido, pela continuidade de f, mas não não vale a unicidade das soluções. Por isso, faz sentido procurar mais de uma solução. Para resolver:

1. Primeiro observe que se $y(t) = 0$, para todo t, teremos que

   $$y'(t) = 0 = 0^{2/3} = y(t)^{2/3},$$

   para todo t. Assim a solução identicamente nula é válida.

2. Usemos a ideia de variáveis separáveis que estudamos em cálculo:

   $$\frac{y'}{y^{2/3}} = 1 \implies \int \frac{y'}{y^{2/3}}\, dy = t + C,$$

   em que C é uma constante. Assim,

   $$3y^{1/3}(t) = t + C \implies y(t) = \left(\frac{t}{3} + K\right)^3,$$

   mas $K = 0$, pois $y(0) = K^3 = 0$. Assim $y(t) = \dfrac{t^3}{27}$ também é solução.

Prova de existência e unicidade

Considere o sistema autônomo $y' = f(y)$ com condição inicial $y(0) = y_0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável com derivada contínua. Nesse caso, se provarmos que f é uniformemente Lipschitz contínua em y, vale o teorema de Picard-Lindelöf. Seja $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ um intervalo fechado com $\epsilon > 0$. Como a derivada de f é contínua, então pelo Teorema de Weierstrass, ela assume seu máximo e mínimo em pontos y_1 e y_2 so intervalo. Seja

$$M = f'(y_1), m = f'(y_2)$$

os valores máximo e mínimo respectivamente e seja $K = \max(|m|, |M|)$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio, sejam x_1, x_2 dois pontos do intervalo, existe $z \in (x_1, x_2)$ tal que,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(z)||(x_1 - x_2)| \leq K|x_1 - x_2|,$$

o que mostra a condição de Lipschitz.

Exercício 3 Encontre a solução geral das equações abaixo. Depois use um software para desenhar curvas das soluções com vários valores iniciais. Você pode usar o Dfield disponível em `http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html`

a) $y' - 2y = 4 - t$.

Considere o fator de integração: $I(t) = e^{\int_0^t (-2)ds} = e^{-2t}$. Assim, temos que a solução geral pode ser expressa por

$$y(t) = I(t)^{-1} \int I(t)(4 - t)dt,$$

isto é:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2t} \int e^{-2t}(4 - t)dt \\ &= e^{2t}[4 \int e^{-2t}dt - \int te^{-2t}dt] \\ &= e^{2t} \left[-2e^{-2t} - \left(\frac{-1}{2}te^{-2t} + \int \frac{1}{2}e^{-2t} \right) \right] dt \\ &= e^{2t} \left[-2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + c \right], c \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t} \end{aligned} \tag{2}$$

Concluo que $y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t}$. Se $y(0) = y_0$, temos que $y_0 = -\frac{7}{4} + c \implies c = y_0 + \frac{7}{4}$.

b) $ty' + y = 3t \cdot \cos(2t), t > 0$.

Usando a regra do produto para derivação, podemos reescrever o problema para

$$ty' + y = (ty)' = 3t \cdot \cos(2t).$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} ty &= \int 3t \cdot \cos(2t)dt \\ &= \frac{3t}{2}\sin(2t) - \int \frac{3}{2}\sin(2t)dt \\ &= \frac{3t}{2}\sin(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3}$$

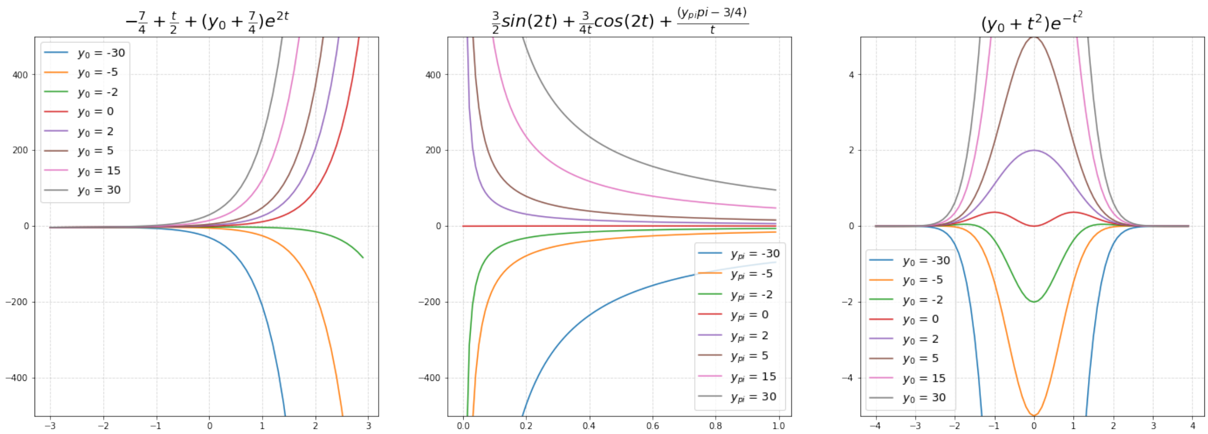

Figura 1: Usando Matplotlib, observe como diferentes soluções podem alterar a direção das soluções.

Como $t \neq 0$, concluo que $y(t) = \frac{3}{2}\sin(2t) + \frac{3}{4t}\cos(2t) + \frac{c}{t}, c \in \mathbb{R}$. Se $y(\pi) = y_0$, temos que $y_0 = \frac{3}{4\pi} + \frac{c}{\pi} \implies c = y_0\pi - \frac{3}{4}$

c) $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$.

Considere o fator de integração: $I(t) = e^{\int_0^t (2s)ds} = e^{t^2}$. Como fizemos em a,

$$y(t) = e^{-t^2}\int e^{t^2}(2te^{-t^2})dt = e^{-t^2}\int 2tdt = e^{-t^2}[t^2+c] = ce^{-t^2} + t^2e^{-t^2}, c \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Concluo que a solução geral é $ce^{-t^2} + t^2e^{-t^2}$. Se $y(0) = y_0$, temos que $y_0 = c$

Exercício 4 Mostre que qualquer combinação afim de soluções particulares de uma equação diferencial linear E também é solução de E. (Ou seja, o conjunto das soluções de equação diferencial linear é uma variedade afim).

Seja E uma equação diferencial linear expressa da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(x)y^{(i)} + b(x) = 0. \quad (5)$$

Vou provar a afirmação por indução no número de soluções particulares n. Sejam y_1 e y_2 soluções particulares de (5). Tome $\alpha \in \mathbb{R}$. Vou provar que

$$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 = y_2 + \alpha(y_1 - y_2)$$

também é solução de (5). Usando a linearidade da derivada:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} & a_i(x)[\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2]^{(i)} + b(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i(x)[\alpha y_1^{(i)} + (1-\alpha) y_2^{(i)}] + b(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i(x)\alpha y_1^{(i)} + a_i(x)(1-\alpha) y_2^{(i)} + b(x) \\
&= \alpha \sum_{i=0}^{m} a_i(x) y_1^{(i)} + (1-\alpha) \sum_{i=0}^{m} a_i(x) y_2^{(i)} + b(x) \\
&= \alpha \sum_{i=0}^{m} a_i(x) y_1^{(i)} + (1-\alpha) \sum_{i=0}^{m} a_i(x) y_2^{(i)} + b(x) + \alpha b(x) - \alpha b(x) \\
&= \alpha \left[\sum_{i=0}^{m} a_i(x) y_1^{(i)} + b(x) \right] + (1-\alpha) \left[\sum_{i=0}^{m} a_i(x) y_2^{(i)} + b(x) \right] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{6}
$$

dado que ambas são soluções de (5). Concluo que $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ é solução para (5).

Suponha a hipótese de indução, isto é, se $y_1, ..., y_n$ são soluções particulares de (5), então qualquer combinação afim delas é solução. Considere, então, a solução y_{n+1} particular para (5). Tome $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, tal que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Sabemos que

$$
y^* \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} y_i
$$

é solução para a equação (5) pela hipótese de indução, dado que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} = 1$. Portanto, como provamos no caso particular acima, $(1-\alpha_{n+1})y^* + \alpha_{n+1}y_{n+1}$ é solução para (5), isto é:

$$
(1-\alpha_{n+1})y^* + \alpha_{n+1}y_{n+1} = (1-\alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} y_i + \alpha_{n+1}y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y_i
$$

é solução da equação (5). Provamos então, por indução, que qualquer combinação afim de soluções particulares é solução também, isto é, esse conjunto de soluções é uma variedade afim.

Exercício 5 Considere a equação $16y'' - 8y' + 145y = 0$. Descreva a equação diferencial de segunda ordem deste exercício na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Use um pacote computacional (`http://math.rice.edu/~dfield/pplane.html`, por exemplo) para traçar várias soluções. Encontre a solução exata para o problema de valor inicial com condições iniciais $y(0) = -2$ e $y'(0) = 1$.

Defina a variável $x = y'$, tal que $x' = y'' = \frac{1}{16}(8y' - 145y)$. Assim, a equação pode ser escrita como o sistema linear:

$$
\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{145}{16}y \\ y' = x. \end{cases}
$$

Considere a forma matricial do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -145/16 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico dessa matriz é

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{145}{16} = 0.$$

Assim, os autovalores de A são $\frac{1}{4} \pm 3i$ e os autovetores correspondentes são $(1/4+3i, 1)$ e $(1/4-3i, 1)$ Como os autovalores são valores complexos, a solução é uma combinação de senos e cossenos. Considere a seguinte decomposição da matriz de A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & -3 \\ 3 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot 1/3 \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Desta mentira podemos calcular a exponencial dessa matriz:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{1/4t} \begin{bmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix} \cdot 1/3 \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= e^{1/4t} \begin{bmatrix} 3\cos(3t) + 1/4\sin(3t) & -3\sin(3t) + 1/4\cos(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0/3 - 1/12y_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= e^{1/4t} \begin{bmatrix} (x_0 - y_0/4 + y_0/4)\cos(3t) + (x_0/12 - y_0/48 - 3y_0)\sin(3t) \\ (x_0/3 - y_0/12)\sin(3t) + y_0\cos(3t) \end{bmatrix} \\ &= e^{1/4t} \begin{bmatrix} x_0\cos(3t) + (x_0/12 - 145y_0/48)\sin(3t) \\ (x_0/3 - y_0/12)\sin(3t) + y_0\cos(3t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

Agora vamos calcular para o caso em que $y(0) = -2$ e$x(0) = y'(0) = 1$. Assim:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{1/4t} \begin{bmatrix} \cos(3t) + (1/12 + 145/24)\sin(3t) \\ (1/3 + 1/6)\sin(3t) - 2\cos(3t) \end{bmatrix} = e^{1/4t} \begin{bmatrix} \cos(3t) + 49/8\sin(3t) \\ 1/2\sin(3t) - 2\cos(3t) \end{bmatrix}$$

Como estamos apenas preocupados com y, temos que:

$$y(t) = e^{1/4t} \left[\frac{1}{2}\sin(3t) - 2\cos(3t) \right].$$

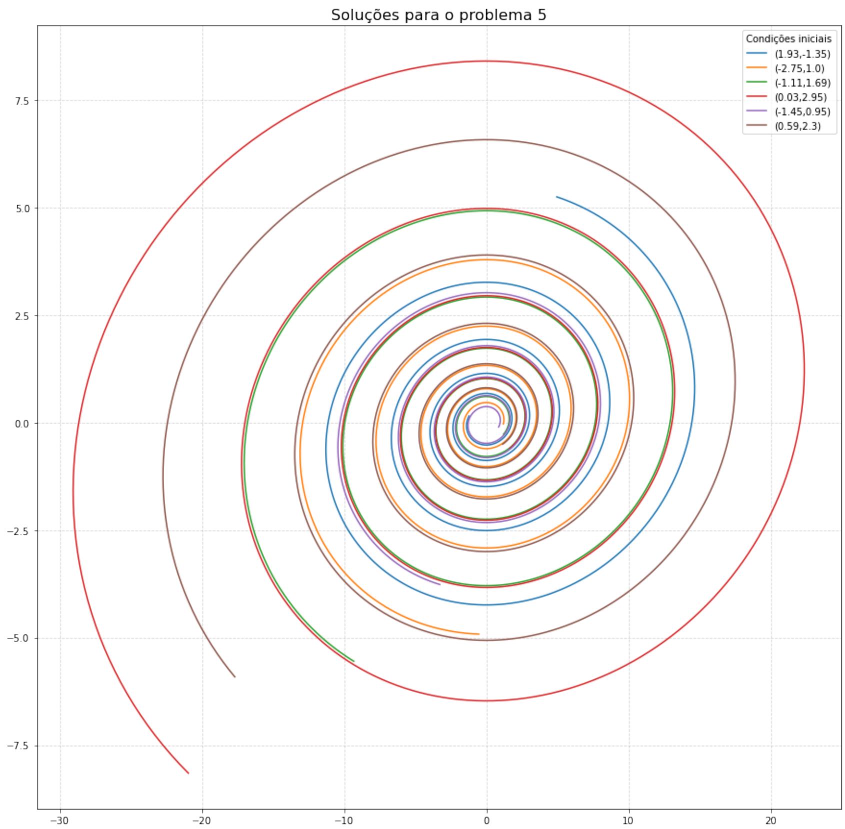

Figura 2: Usando Matplotlib, observe como diferentes soluções podem alterar a direção das soluções.