Lista 2 - Rascunho monitor
Lucas Moschen

1. Denoto, $\frac{d}{ds}$ como ponto $(\dot{\ })$. Defina

$$p = u_x, \quad q = u_t$$

Seja $s) = u(x(s), t(s))$ uma solução. Assim:

$$0 = \frac{d}{ds} F(u, x, t, p, q)$$

$$= F_u(u_x \cdot \dot{x} + u_t \cdot \dot{t}) + F_x \cdot \dot{x} + F_t \cdot \dot{t} + F_p \cdot \dot{p} + F_q \cdot \dot{q}$$

$$= (F_u \cdot u_x + F_x)\dot{x} + (F_u \cdot u_t + F_t)\dot{t} + F_p \cdot \dot{p} + F_q \cdot \dot{q}$$

$$0 = \frac{d}{dx} F(u, x, t, p, q)$$

$$= F_u \cdot u_x + F_x + F_p \cdot p_x + F_q \cdot p_t$$ $= q_x$, por Schwarz

$$\Rightarrow \nabla p (F_p, F_q) = -F_u \cdot u_x - F_x,$$

Analogamente $\nabla q (F_p, F_q) = -F_u \cdot u_t - F_t$, quando derivamos em relação a t.

Considere a família de curvas dada por

$$\dot{x} = F_p$$
$$\dot{t} = F_q$$

Assim teremos

$$\dot{p} = \nabla p \cdot (\dot{x}, \dot{t})$$
$$= \nabla p \cdot (F_p, F_q)$$
$$= -F_u \cdot p - F_x$$

Analogamente $\dot{q} = -F_u \cdot q - F_t$

Por fim $\dot{u} = u_x \cdot \dot{x} + u_t \cdot \dot{t}$

$= p \cdot F_p + q \cdot F_q$

Assim, formamos as equações características.

2. (a) $\dot{x} = F_p = c \Rightarrow x(s) = c \cdot s + x_0$

$\dot{t} = F_q = 1 \Rightarrow t(s) = s,$

dado que $t(0) = 0$ e $x(0) = x_0$

$\dot{p} = 0$

$\dot{q} = 0$

$\dot{u} = u_x \cdot c + u_t = 0 \Rightarrow u(s) = \text{constante}$

Logo

$$u(s) = u(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = f(x_0)$$

$$u(s) = u(x(s), t(s))$$
$$= u(c \cdot t + x_0, t) = f(x_0)$$

Como $x = ct + x_0 \Rightarrow x_0 = x - ct$ e, portanto,

$$u(x,t) = f(x - ct)$$

(b) $\dot{x} = F_p = c \cdot u$

$\dot{t} = F_q = 1 \Rightarrow t = s$

$\dot{p} = -c \cdot p^2$

$\dot{q} = -c \cdot pq$

$\dot{u} = u_x \cdot cu + u_t = 0 \Rightarrow u(s) = f(x_0)$

Assim

$$\dot{x} = c \cdot f(x_0) \Rightarrow x(s) = c \cdot f(x_0) \cdot s + x_0$$

$$x_0 = x - c f(x_0) \cdot t$$

$$u(x,t) = f(x - c \cdot f(x_0) \cdot t)$$

Suponha:

i) $x_0 \le 0$: $x = x_0 + c f(x_0) t = x_0 + 2ct$ é a curva característica, logo $x \le 2ct$. Assim

$$u(x,t) = f(x - 2ct) = 2$$

ii) $x_0 \in (0,2)$: $x = x_0 + c\left(-\frac{x_0}{2} + 2\right) t$ é curva característica. Assim $x = 2ct + x_0\left(1 - \frac{ct}{2}\right)$. Logo

$$x \in (2ct, ct + 2).$$

Vamos ver depois que $t/c < 2 \Rightarrow 2ct < ct + 2$.

Assim $u(x,t) = f(x - c f(x_0) t) = -\frac{(x - 2ct)}{2} + 2$

iii) $x_0 \ge 2$. De forma equivalente veremos que

$$x \ge ct + 2$$

e $u(x,t) = f(x - ct) = 1$

$$u(x,t) = \begin{cases} 2, & x \le 2ct \\ ct - \frac{x}{2} + 2, & x \in (2ct, ct+2) \\ 1, & x \ge ct + 2 \end{cases}$$

De fato isso ocorre se $t/c < 2$.

Temos um choque quando as condições iniciais $x_1 \neq x_2$

$$x_1 + c \cdot f(x_1) \cdot t = x_2 + c \cdot f(x_2) \cdot t$$

$$\Rightarrow t\,(f(x_2) - f(x_1)) = 1/c\,(x_1 - x_2)$$

Primeiro note que se $x_1, x_2 \le 0$ ou $x_1, x_2 \ge 2$, não existe choque. Agora considere os casos:

i) $x_1 \le 0$, $x_2 \in (0,2)$:

$$t = \frac{1}{c} \frac{(x_1 - x_2)}{\left(-\frac{x_2}{2} + 2\right) - 2} = \frac{2}{c}\left(1 - \underbrace{x_1/x_2}_{\le 0}\right) \ge \frac{2}{c}$$

ii) $x_1 \le 0$, $x_2 \ge 2$:

$$t = \frac{1}{c}\frac{(x_1 - x_2)}{1 - 2} = \frac{x_2 - x_1}{c} \ge \frac{2}{c}$$

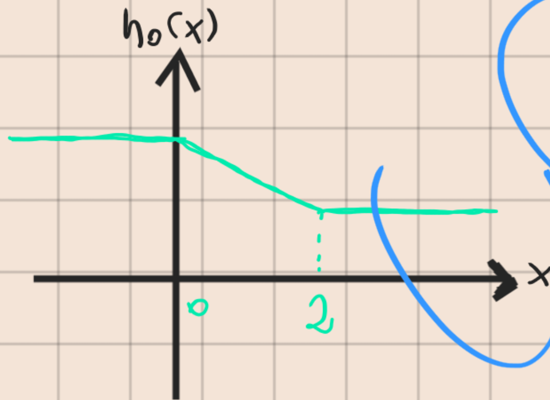
iii) $x_1, x_2 \in (0,2)$

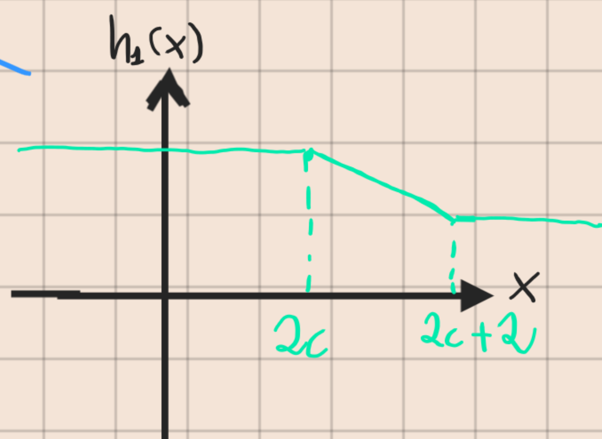
$$t = \frac{1}{c}\frac{(x_1 - x_2)}{(-\frac{x_2}{2}+2)-(\frac{x_1}{2}+2)} = \frac{2}{c}$$

iv) $x_1 \in (0,2)$, $x_2 \ge 2$

$$t = \frac{1}{c}\frac{(x_1 - x_2)}{1 + \frac{x_1}{2} - 2} = \frac{2}{c}\frac{\overbrace{(x_2 - x_1)}^{\ge 2 - x_1}}{2 - x_1} \ge \frac{2}{c}$$

Em i, ii, iii e iv, temos que $t \ge 2/c$, logo se $c \le 1$, não há ocorrência de choques. $x_0 = 0$, $c = 1$





Para desenhar as próximas, precisamos usar as condições de Rankine-Hugoniot, para isso,

$$u_t + c u u_x = u_t + [F(u)]_x = 0$$

se $F(u) = cu^2/2$, nesse caso

$$x^*_t = \frac{c}{2}\frac{(u_-^2 - u_+^2)}{u_- - u_+} = \frac{c}{2}(u_- + u_+)$$

Para $x < 0$, $u = 2$, enquanto se $x > 2$, teremos $u = 1$ para $t \ge 2$. Assim, seja a curva com $u_- = 2$ e $u_+ = 1$ e

$$x^*_t = \frac{c}{2} \Rightarrow x^* = \frac{c}{2} t + K$$

Essa curva deve conter o ponto $t = 2/c$ e x quando as curvas se intersectam no caso iii, por exemplo: $x_1 = 1$, $x = x_1 + c \cdot f(x_1)\, t$

$$= 1 + c\left(-\frac{1}{2} + 2\right) \cdot \frac{2}{c} = 1 - 1 + 4 = 4$$

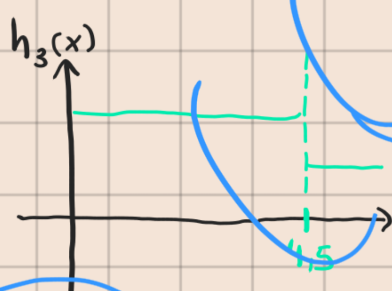
Assim $K = 3$,

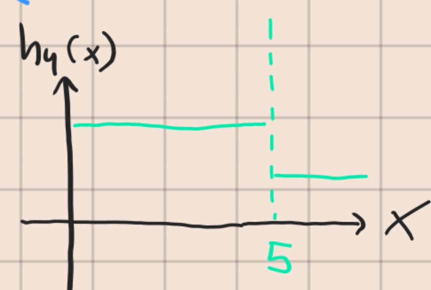
$$x^* = c/2\, t + 3$$

Assim, para $t \geq 2$,

$$u(x,t) = \begin{cases} 2, & x < \frac{c}{2} t + 3 \\ 1, & x > c/2\, t + 3 \end{cases}$$

Lembrando $c = 1$.





c) $\dot{x} = F_p = -t$
$\dot{t} = F_q = x$
$\dot{p} = -F_u \cdot u_x - F_x = p - q$
$\dot{q} = -F_u \cdot u_t - F_t = p + q$
$\dot{u} = u_x(-t) + u_t x = u$

Logo, ao longo das curvas características,

$$u(s) = u_0 e^s = f(x_0) e^s$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\operatorname{sen} s \\ \operatorname{sen} s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x(s) &= x_0 \cos s \\ t(s) &= x_0 \operatorname{sen} s \end{aligned}\right\} \quad x^2 + t^2 = x_0^2 \qquad (1)$$

Como $x_0 \geq 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt{x^2+t^2}$.
Além disso

$$t/x = \tan s \Rightarrow s = \arctan(t/x)$$

Como para cada (x,t), existe somente um valor $x_0 \geq 0$ que satisfaz (1), não há choches.

Concluo que

$$u(x,t) = f\left(\sqrt{x^2+t^2}\right) e^{\arctan\left(\frac{t}{x}\right)},$$

$x, t \geq 0$