Equações de primeira ordem

- EDPs com derivadas apenas de primeira ordem.
- Considere inicialmente o caso de $n=2$ e linear:

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y = c_0(x,y) + c_1(x,y)\,u$$

Método das característ.

- Desenvolvido por Hamilton, que estudava a propagação da luz.
- O método é baseado em custurar a solução com uma família de 1 parâmetro de curvas. Seja Γ a curva inicial

$$\Gamma = \Gamma(s) = (x_0(s),\ y_0(s),\ u_0(s)),\quad s \in (\alpha,\beta)$$

e escreva a equação como

vetor normal à superfície definida por u

$$(a,\ b,\ c_0 + c_1 \cdot u)\cdot(u_x,\ u_y,\ -1) = 0$$

↳ Logo esse vetor está no plano tangente.

Assim, o sistema

Solução local

$$\begin{cases} \dot{x} = a \\ \dot{y} = b \\ \dot{u} = c_0 + c_1 u \end{cases}$$

Sistema de equações características.

define curvas na superfície. As soluções são as curvas características.
Considere, para cada curva, uma condição inicial

$$x(0,s) = x_0(s),\quad y(0,s) = y_0(s),\quad u(0,s) = u_0(s),$$

i.e., quando $t=0$, as curvas estão em Γ.

↳ propagamos a solução dada em Γ.

Obs.: No caso quasilinear $a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u)$, obtemos as mesmas equações características. A diferença é que as primeiras duas equações são independentes da terceira no caso linear.

⇝ No caso linear, considere a projeção

$$\dot{x} = a(x,y) \qquad \dot{y} = b(x,y)$$

Estamos calculando as soluções ao longo dessas curvas.

⇝ Após resolver o sistema, obtemos soluções $x(t,s)$, $y(t,s)$ e $u(t,s)$, o qual precisamos inverter para $u(x,y)$. Pelo T. da Função Implícita, a transformação é invertível se $\det(\text{Jacobiano}) \neq 0$. Como regra, para que tenhamos uma única solução próximo à curva inicial, essa condição (que chamamos de transversalidade) deve ser satisfeita.

Teorema de Existência e Unicidade

Seja o problema

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

$$x(0,s) = x_0(s), \quad y(0,s) = y_0(s), \quad u(0,s) = u_0(s).$$

A equação e curva inicial satisfazem a condição de transversalidade em s se

$$\det(J)|_{t=0} = x_t(0,s)\,y_s(0,s) - y_t(0,s)\,x_s(0,s)$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ (x_0)_s & (y_0)_s \end{vmatrix} \neq 0$$

Teorema: Suponha que a, b, c são funções suaves numa vizinhança de Γ e que a condição de transversalidade vale $\forall s \in (s_0 - 2\delta, s_0 + 2\delta)$ na curva inicial. Então o problema tem solução única em $(t,s) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Caso contrário, ou não existem soluções, ou existem infinitas.

Leis de conservação e choques

⇝ Considere o problema $u_{\underset{\text{tempo}}{y}} + u u_x = 0$ que modela o fluxo de massa com concentração $u(x,y)$. As soluções desse problema desenvolvem um tipo de singularidade chamado choque de onda.

- Usando o método das características, chegamos na solução (implícita)
$$u = h(x - uy),$$
em que $u(x,0) = h(x)$ é condição inicial.

- Como diferentes características têm diferentes inclinações determinadas por u, elas podem intersectar, o que impede de usar o método a partir do choque.

- Reescreva a equação integrando em x: tome $[a,b]$ arbitrário e
$$\partial_y \int_a^b u(\xi, y)\, d\xi + \frac{1}{2}\left[u^2(b,y) - u^2(a,y)\right] = 0$$

Seja a curva $x = \gamma(y)$ de discontinuidade da solução. Assim
$$\partial_y \left[\int_a^{\gamma(y)} u(\xi,y)\, d\xi + \int_{\gamma(y)}^b u(\xi,y)\, d\xi \right] + \frac{1}{2}\left[u^2(b,y) - u^2(a,y)\right] = 0$$
Diferenciando as integrais com respeito a y, obtemos que
$$\gamma'(y) = \frac{1}{2}(u^- + u^+),$$

em que u^- e u^+ são os valores-limite de u ao nos aproximarmos de γ pela esquerda e pela direita, respectivamente.

- Na forma geral de leis de conservação, temos
$$u_y + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0.$$

Temos que a curva de descontinuidade é
$$\gamma'(y) = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-},$$

que define a condição Rankine-Hugoniot.

Caso geral

⇝ Denote $p = u_x$ e $q = u_y$.

$$\begin{cases} \dot{x} = F_p(x, y, u, p, q) \\ \dot{y} = F_q(x, y, u, p, q) \\ \dot{u} = p\, F_p(x, y, u, p, q) + q\, F_q(x, y, u, p, q) \\ \dot{p} = -F_x - pF_u \\ \dot{q} = -F_y - qF_u \end{cases}$$

⇝ A condição de transversalidade generalizada é: seja

$$P_0 = (x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0), p_0(s_0), q_0(s_0))$$

um ponto que satisfaz $F(P_0) = 0$, $u_0'(s_0) = p_0(s_0)\, x_0'(s_0) + q_0(s_0)\, y_0'(s_0)$ e $x'(s_0) F_q(P_0) - y_0'(s_0) F_p(P_0) \neq 0$

⇝ Com isso, existe solução local em torno de $t = 0$, $s = s_0$.