PhD Equações Diferenciais Parciais e Aplicações 2023.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Guilherme Tegoni Goedert
Monitor Lucas Machado Moschen Entrega 14/04/2023

Lista 1

Exercício 1 Considere o sistema

$$\begin{aligned} u_x &= (3+\epsilon)x^2y + y, \\ u_y &= x^3 + x, \\ u(0,0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Mostre que, se $\epsilon = 0$, o sistema admite uma única solução u de classe C^2.

(b) Prove que para $\epsilon \neq 0$, o sistema não admite solução de classe C^2.

Exercício 2 Considere a EDP

$$au_x + bu_y = 0 \tag{2}$$

e suponha que toda solução de (2) satisfaça $u(1,2) = u(3,6)$. Calcule o valor de b/a supondo que $a \neq 0$.

Exercício 3 Seja a função u a densidade de uma quantidade **em equilíbrio** em um conjunto aberto U. Suponha que o fluxo da densidade F satisfaz a seguinte relação:

$$F = -a\nabla u, \text{ para } a > 0,$$

visto que o fluxo vem de regiões mais concentradas para menos concentradas. Usando o fato de que para toda subregião $V \subset U$, o fluxo líquido através de ∂V é zero, derive a equação de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

Exercício 4 Considere a equação do calor com condição inicial:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

em que g é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. A ideia deste exercício é prover uma solução suave para a equação em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Para isso, defina as funções

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \mathbb{1}(t > 0).$$

e

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t) g(y)\, dy.$$

Mostre que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ e que satisfaz a equação do calor

$$u_t = \Delta u, \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Ademais, demonstre que

$$\lim_{(x,t)\to(a,0^+)} u(x,t) = g(a), \forall a \in \mathbb{R}^n.$$