PhD Equações Diferenciais Parciais e Aplicações 2023.1

Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Guilherme Tegoni Goedert
Monitor Lucas Machado Moschen Entrega 05/05/2023

Lista 2

Exercício 1 (Capítulo 3.2 — Evans) Considere a equação diferencial parcial (EDP)

$$F(Du(x), u(x), x) = 0,$$

para $x \in U$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, e a condição de fronteira $u(x) = g(x)$ para $x \in \Gamma$, em que $\Gamma \subseteq \partial U$. Generalize o método das características coberto no capítulo 2 do livro para n dimensões, isto é, descreva curvas $\gamma : I \to U$ em que, ao longo delas, a solução $z(s) := u(\gamma(s))$ tenha uma estrutura mais simples e, portanto, reduzindo a EDP em um sistema de EDOs.

Exercício 2 Seja $p \in \mathbb{R}$. Considere a EDP

$$xu_x(x, y) + yu_y(x, y) = \lambda u(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Encontre as curvas características para esta equação.

(b) Considere que $\lambda = 4$ e $u(x, y) = 1$ para todo (x, y) tal que $x^2 + y^2 = 1$, e encontre uma solução explícita.

(c) Considere que $\lambda = 2$ e $u(x, 0) = x^2$ para todo $x > 0$. Encontre duas soluções com essa condição. Esse resultado contradiz o teorema de existência e unicidade?

Exercício 3 Considere a EDP de primeira ordem dada pela equação

$$u_x(x, y) - \frac{e^x}{1 + e^y} u_y(x, y) = 0, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

Descreva as equações características dessa EDP e encontre a solução com a condição inicial $u(x, 0) = e^{2x}$.

Exercício 4 Mostre que as únicas funções de classe C^1 que satisfazem a equação de Burgers

$$u_t + uu_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

são monotônicas não-decrescentes em x para cada $t > 0$. Conclua que se $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u_0'(\bar{x}) < 0$ para algum $\bar{x}$, a equação e Burgers não pode ter solução clássica para todo $t > 0$.

Exercício 5 Assuma que $F(0) = 0$ e que u é solução fraca contínua da lei de conservação

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que u tem suporte compacto em $\mathbb{R} \times [0, T]$ para cada $T > 0$. Prove que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx,$$

para $t > 0$.

Exercício 6 Considere a equação de segunda ordem

$$x u_{xx} - y u_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0.$$

(a) Encontre o domínio em que esta equação é elíptica e o domínio em que é hiperbólica.

(b) Para cada um desses domínios, encontre a transformação canônica correspondente.