**PhD Equações Diferenciais Parciais e Aplicações 2023.1**
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Guilherme Tegoni Goedert
Monitor Lucas Machado Moschen — Entrega 27/06/2023

# Lista 3

**Exercício 1** Considere o sistema de leis de conservação em uma dimensão

$$\begin{cases} u_t(x,t) + F(u(x,t))_x = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ são funções dadas e $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^m$ é desconhecida. Uma solução $u \in L^\infty(R \times \mathbb{R}_{>0})$ é dita *solução integral* se

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u(x,t) \cdot v_t(x,t) + F(u(x,t)) \cdot v_x(x,t)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty g(x) \cdot v(x,0)\, dx = 0$$

para toda função de teste $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^m$ suave com suporte compacto.

(a) Seja $u$ uma solução integral e assuma que $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma região dividida por uma curva paramétrica suave $\gamma$ de tal forma que $u$ é suave à esquerda (região $V_l$) e à direita (região $V_r$) de $\gamma$. Aplicando uma abordagem similar ao caso de uma lei de conservação unidimensional, prove que

$$\int_\gamma [(F(u_l) - F(u_r))n_1 + (u_l - u_r)v_2] \cdot v\, dl = 0,$$

isto é, a integral sobre $\gamma$ com respeito ao comprimento de arco é nula. Denotamos $u_l$ e $u_r$ como os limites à esquerda e à direita de $u$, respectivamente, com respeito ao comprimento de arco de $\gamma$, e $n = (n_1, n_2)$ o vetor normal unitário à curva $\gamma$. Calcule $n$ para essa curva e conclua a *condição de salto Rankine-Hugoniot*

$$F(u_l) - F(u_r) = \gamma'(t)(u_l - u_r).$$

(b) As equações de Euler descrevem a conservação de massa, momento e energia de um fluído assumindo a não viscosidade. Elas são descritas matematicamente como

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 & \text{(conservação de massa)}, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x = 0 & \text{(conservação de momento)}, \\ (\rho E)_t + (\rho E v + p v)_x = 0 & \text{(conservação de energia)}, \end{cases}$$

em que $\rho$ é a densidade, $v$ é a velocidade e $E$ é a energia total por unidade de massa. Assume-se em geral que $E = e + v^2/2$, sendo $e$ a energia interna por unidade de massa. Também é comum assumirmos que a pressão $p$ é uma função conhecida da densidade e da energia interna, o que se chama de relação constitutiva. Escreva as equações de Euler como um sistema de leis de conservação no formato geral.

(c) No estudo da dinâmica dos fluidos, encontrar as curvas de choque como no exercício (a) é uma tarefa importante. Por exemplo, a partir dessas curvas, se os choques forem suficientemente fracos em certo sentido físico, obtemos que a entropia aumenta através do choque, o que é um resultado interessante. Veja o livro de Joel Smoller, *Shock Waves and Reaction—Diffusion Equations*, para mais detalhes. Por esse motivo, aplique (a) e encontre as condições de salto de Rankine-Hugoniot para as equações de Euler no estudo da dinâmica de gases. Isso se reduz a definir a função $F$ propriamente.

**Exercício 2** Considere a equação

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0.$$

(a) Mostre que a forma canônica dessa equação é $v_{st} = 0$ e encontre o sistema de coordenadas $s = s(x, y)$ e $t = t(x, y)$ correspondente.

(b) Dadas funções $f$ e $g$, encontre uma solução que satisfaça $u(0, y) = f(y)$, $U_X(0, y) = g(y)$.

(c) Quais condições as funções $f$ e $g$ devem satisfazer para que a solução $u(x, y)$ seja clássica?

**Exercício 3** Considere o problema que modela uma corda semi-infinita com condição de fronteira livre:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_{>0}, \\ u_x(0,t) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}_{>0}, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \end{aligned}$$

em que $f \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ e $g \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ satisfaçam $f'_+(0) = g'_+(0) = 0$.

(a) Encontre a solução $u(x, t)$.

(b) Resolva o problema para $f(x) = x^3 + x^6$ e $g(x) = \sin^3(x)$. A solução é clássica?

**Exercício 4** Seja $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ solução da seguinte equação da onda não homogênea:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) &= h(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

em que $f \in C^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ são funções dadas. Para cada $t$, assuma que

$$\int_{\mathbb{R}} h(x,t)^2\, dx \leq \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2$$

e que $u(\cdot, t)$ tenha suporte compacto. Defina a função de energia como

$$E(t) := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\, dx}.$$

(a) Mostre que
$$\frac{d}{dt}E^2(t) = -\int_{\mathbb{R}} h(x,t)u_t(x,t)\,dx.$$

(b) Mostre que existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \geq 0$,
$$E(t) \leq E(0) + C.$$

(c) Considere a seguinte modificação da equação da onda
$$u_{xx} - u_{tt} = 2\beta u_t,$$
em que $\beta > 0$ é o coeficiente de amortecimento. Note que $h$ nesse caso não é função dada. Defina uma função de energia $\tilde{E}$ apropriada para essa equação e mostre que ela é decrescente no tempo. Conclua que essa modificação preserva a estabilidade da equação da onda segundo a energia, isto é,
$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0), \forall t \geq 0.$$

**Exercício 5** Considere o problema com condição inicial
$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) = 0, \quad & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ u(x,0) = g(x), \quad & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = h(x), \quad & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1}$$
em que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ são funções dadas com $g$ e $h$ tendo suporte compacto e $f(0) = 0$. Defina a função
$$F(z) := \int_0^z f(u)\,du, z \in \mathbb{R}.$$

(a) Suponha que $u$ é uma solução suave para (1) e que $u(\cdot,t)$ tenha suporte compacto para cada tempo $t$. Defina a energia
$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t(x,t)^2 + \|\nabla u(x,t)\|^2 + 2F(u(x,t))\,dx.$$
e mostre que $E(\cdot)$ é constante no tempo.

(b) Seja $n = 3$. Mostre que existe $T > 0$ e uma única solução suave $u$ para o problema (1) em $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$.

(c) Seja $T^* = \sup\{T > 0 \mid \exists$ solução suave $u$ para o problem (1) em $\mathbb{R}^3 \times (0,T)\}$. Chamamos $T^*$ de tempo maximal. Mostre que se $T^* < \infty$, então
$$\lim_{t \to T^*} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \infty.$$

*Dica: Procure por uma solução da forma $u = v + w$ em que $v$ é solução do problema homogêneo e $w$ tem condições de fronteira $0$. Encontre $w$ como função de $u$ e defina $A[u](x,t) = v(x,t) + w(u(x,t))$. Mostre que $A[u]$ é uma contração para $T$ suficientemente pequeno e aplique o Teorema da Contração de Banach. Para estimar a norma $L^\infty$, use a desigualdade de Gronwall.*

**Exercício 6** Considere a equação da onda em três dimensões para o caso não homogêneo:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= h(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

em que $f, g, h$ são funções suficientemente suaves.

(a) Encontre uma solução para o caso em que $f$ e $g$ são identicamente nulas.

(b) Fixe $T > 0$. Seja $u$ uma solução suave para $t \in (0,T)$ quando $h$ é identicamente nula. Mostre que existe uma constante $K$ tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{K}{t} U(0), \forall t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^3,$$

onde

$$U(t) = \int_{R^3} |u(x,t)| + |u_t(x,t)| + |\nabla u(x,t)| + |\nabla u_t(x,t)| + |\nabla^2 u(x,t)|\, dx.$$

(c) Considere $h$ sendo identicamente nula e substitua as condições iniciais do problem, i.e., $u = f$ e $u_x = g$ em $\mathbb{R} \times \{0\}$, pela condição

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(t)}{t} = 0.$$

Mostre que $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$.

**Exercício 7** Seja $L$ um operador linear do tipo

$$L = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) D^{\alpha_k},$$

em que, para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suficientemente suave,

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi.$$

Considere o seguinte problema de segunda ordem:

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - L) u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega$ é um conjunto aberto. Prove que a solução para esse problema é

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)\, ds,$$

em que, para cada $s > 0$, $v(x,t;s)$ é solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - L) v(x,t;s) = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > s, \\ v(x,s;s) = 0, & x \in \Omega, \\ v_t(x,s;s) = f(x,s), & x \in \Omega. \end{cases}$$