PhD Equações Diferenciais Parciais e Aplicações 2023.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Guilherme Tegoni Goedert
Monitor Lucas Machado Moschen Entrega 30/06/2023

Lista 4

Exercício 1 Considere o problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = 0, & x \in (0,L), t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,T], \end{cases}$$

que descreve a evolução do calor em uma haste unidimensional isolada.

(a) Encontre uma solução para o problema usando o método da separação de variáveis.

(b) Resolva a equação do calor para $L = \pi$, $k = 10$ e $f(x) = 1 + \sin^3(x)$.

(c) Para cada $x \in (0,\pi)$, encontre $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ e explique o significado físico.Encontre uma solução para o problema usando o mé

Exercício 2 Suponha que u é solução da equação do calor

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t), x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, t \in (0,T],$$

sujeita a $u(x,0) = g(x)$, duas vezes continuamente diferenciável em x e uma vez em t. Defina $U_T = U \times (0,T]$, $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$ e, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $r > 0$,

$$E(x,t;r) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x-y,t-s) \geq r^{-1}\},$$

em que

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Então, vale a propriedade do valor médio

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dy\, ds$$

para cada $E(x,t;r) \subseteq U_T$. Use essa fórmula para mostrar o princípio do máximo para a equação do calor, isto é,

$$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u,$$

assumindo u contínua em $\bar{U}_T$.

Exercício 3 Considere a equação Sine-Gordon que advém do estudo de superfícies de curvatura negativa constante:
$$u_{tt} = u_{xx} - \sin(u).$$

(a) Suponha que a solução para essa equação é da forma de uma onda viajante, isto é, $u(x,t) = f(x - ct)$ para uma velocidade $c > 0$. Mostre que a função f deve satisfazer

$$(1 - c^2)f''(z) = \sin(f(z)),$$

em que $z = x - ct$.

(b) Reduza a equação de segunda ordem acima para uma de primeira ordem.

(c) Encontre **uma** solução para a equação diferencial ordinária considerando $c \in (0, 1)$. Conclua escrevendo a solução $u(x,t)$ como uma onda viajante.

(d) Verifique como o formato da onda viajante muda conforme c varia.

Exercício 4 Seja f uma função periódica com período 2π e de classe C^1 por partes. A *tranformada de Fourier* de f é a sequência complexa $\mathcal{F}[f] = \hat{f} = \left(\hat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ definida por

$$\mathcal{F}[f](k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx.$$

Os números $\hat{f}(k)$ são os *coeficientes de Fourier* de f e a série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\exp(ikx)$$

é a *série de Fourier* gerada por f.

(a) Mostre que a série de Fourier converge pontualmente para $f(x)$ em todo ponto x que f é contínua. Para isso siga os seguintes passos:

(i) Defina uma função g periódica de período 2π de forma que $g(x) = f(x)/(e^{ix} - 1)$ em $x \in [-\pi, \pi]/\{0\}$ e $g(0) = -if'(0^+)$. Mostre que $\lim_{|k|\to\infty} \hat{g}(k) = 0$ usando o lema de Riemann-Lebesgue.

(ii) Assuma que f é contínua em zero com $f(0) = 0$ e mostre que a série de Fourier gerada por f converge para 0 usando a relação entre $\hat{f}$ e $\hat{g}$.

(iii) Para cada x_0 em que f é contínua, transforme a função f geral no caso mencionado acima e use o fato demonstrado para mostrar que a série de Fourier converge pontualmente para $f(x_0)$.

(b) Declare e prove as seguintes propriedades da Transformada de Fourier:

(i) Linearidade: $\mathcal{F}[af + bg]$ em que a e b são constantes e f e g são funções.

(ii) Escala: $\mathcal{F}[af]$ em que a é constante e f é função.

(iii) Translação: $\mathcal{F}[g]$ em que $g(x) = f(x - a)$ para uma constante a e função f.

(iv) Derivada: $\mathcal{F}[f']$, em que f é uma função.

(v) Convolução: $\mathcal{F}[f * g]$, em que f e g são funções. e $*$ indica a operação de convolução.

(vi) Teorema de Parseval: relação entre norma da transforma de Fourier e da norma da função.

(c) Considere a equação de Fokker-Planck em uma dimensão:

$$u_t(x,t) = \frac{d}{dx}\left(Du_x(x,t) - \beta(x)u(x,t)\right), x \in [-\pi,\pi], t > 0.$$

em que $u(x,t)$ denota a função de densidade de probabilidade de uma partícula na posição x e tempo t, $D > 0$ é o coeficiente de difusão, que assumimos ser constante, e $\beta(x)$ é a derivada da função potencial $U(x)$ e é o coeficiente drift. Assumimos para esse exercício que $U(x) = kx^2/2$. Fixamos as condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u(-\pi,t) &= u(\pi,t), t \geq 0, \\ u_x(-\pi,t) &= u_x(\pi,t), t \geq 0, \\ u(x,0) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right\}, \end{aligned}$$

em que $0 < \sigma << 1$. Mostre como usar a transformada de Fourier para simplificar esta EDP e resolva-a no espaço de Fourier.