PhD Equações Diferenciais Parciais e Aplicações 2023.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Guilherme Tegoni Goedert
Monitor Lucas Machado Moschen — Entrega 03/07/2023

Lista 5

Exercício 1 Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in B_1(0) \\ u(x,y) = 4x^3, & (x,y) \in \partial B_1(0), \end{cases}$$

em que $B_1(0)$ é o disco aberto de raio 1 centrado na origem.

(a) Encontre a solução $u(x,y)$. *Dica: escreva o problema em coordenadas polares, resolva-o e depois volte para as coordenadas originais.*

(b) Encontre o valor máximo de $u(x,y)$ no disco fechado de raio 1.

Exercício 2 Seja u a solução dada pela fórmula de Poisson para o problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n_{>0} \\ u(x) = g(x), & x \in \partial \mathbb{R}^n_{>0}, \end{cases}$$

em que g é uma função limitada tal que $g(x) = \|x\|$ quando $\|x\| \le 1$ e $x \in \partial \mathbb{R}^n_{>0}$. Mostre que $\nabla u(x)$ não é limitada próximo de $x = 0$. Para isso, estime

$$\frac{u(\lambda e_n) - u(0)}{\lambda},$$

em que e_n é o vetor da base canônica na direção n. *Dica: usar os resultados intermediários do teorema 14 do capítulo 2 do Evans.*

Exercício 3 (Extra) As equações de Navier-Stokes são as leis do movimento de Newton para modelar o movimento de um fluído viscoso. Elas podem ser descritas em duas ou três dimensões. O vetor velocidade do fluido $\mathbf{u}(x,t) = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t))$ e a pressão escalar $p(x,t) \in \mathbb{R}$ são os valores desconhecidos. Considerando a incompressibilidade do fluído, as equações são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \mathbf{u}(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

em que ν é a viscosidade cinemática em m^2/s e $\mathbf{f}$ é a força externa. O termo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ representa a advecção do fluido. Se $\nu = 0$, o fluido é não viscoso e as equações se tornam as *equações de Euler*. Uma solução é dita *fisicamente razoável* se $p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ e

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 \, dx$$

é uma função limitada, isto é, a energia cinética do fluido deve ser limitada por uma constante.

Considere $n = 3$, $\nu > 0$, $f \equiv 0$ e u_0 uma função fisicamente razoável tal que $\nabla \cdot u_0 = 0$ em todo espaço. Prove ou dê um contra-exemplo para o seguinte fato: **existem soluções fisicamente razoáveis p e $\mathbf{u}$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisfazem as equações de Navier-Stokes com condição inicial u_0.**