

Definições Preliminares

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots) = 0$$

→ Jacques Hadamard

→ Well-posedness: existência + unicidade + estabilidade a pequenas mudanças

Classificação:

1. Ordem: ordem da maior derivada da equação

2. Linearidade: Se F é linear em u e suas derivadas. Em geral, a não linearidade é mais pronunciada quando aparece na derivada de maior ordem. Se a equação é linear nas derivadas de maior ordem, dizemos que ela é **quasi-linear**. Se a não linearidade é somente na função desconhecida, chamamos de **Semi-linearidade**.

→ Solução clássica (ou forte): função de classe C^k que satisfaz a EDP de ordem k . Soluções não clássicas são fracas.

Alguns exemplos:

1. Equação do calor: modelada usando conservação de energia em um domínio D .

$$u_t = k \Delta u.$$

2. Hidrodinâmica e Acústica: teoria do movimento dos fluidos. Considerando que o movimento do fluido na fronteira é dado pela componente da velocidade na direção \vec{n} , obtém-se a equação do transporte $\rho_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$. Partindo da conservação de momento, chegamos na equação $u_t + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g$. Além disso, $\rho = f(p)$. Considerando a viscosidade do fluido, i.e., fricção entre partículas, chegamos no sistema Navier-Stokes.

3. Vibrações de uma corda: força externa na direção transversal + tensão. Usando uma lei constitutiva e a segunda lei de Newton, chegamos em

$$u_{tt} - \frac{c^2}{\sqrt{1+u_x^2}} u_{xx} = \frac{f(x,t)}{\rho}$$

↑ amplitude

4. Equação de Poisson: derivada calculando a expectativa de vida de uma

partícula que nasce em (x, y) e morre em ∂D . Supondo certa sobrevivência, chegamos em

$$\Delta u = -\frac{1}{K},$$

em que $(\partial x)^2 / 2\delta t = K$.

Condições associadas:

→ Valor da função no tempo inicial. Para EDPs de ordem mais alta, precisamos informação da velocidade inicial, etc.

→ Condições de fronteira:

1. **Dirichlet:** o comportamento da função desconhecida é dado na fronteira.

2. **Neumann:** " " " derivada normal da função desconhecida é dada na fronteira.

3. **Third kind / Robin:** envolve a função e sua derivada normal.