Equações de segunda ordem lineares

$$L[u] = \underbrace{a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy}}^{\text{parte principal de } L:\ L_0} + d u_x + e u_y + f u = g,$$

em que $a, b, \dots, f, g$ são funções de x e y.

Seja $\delta(L)(x,y) = b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y)$. A equação é dita

- hiperbólica no ponto (x,y) se $\delta(L)(x,y) > 0$
- parabólica $=$
- elíptica $<$

Mudança de coordenadas: $(\xi, \eta) = (\xi(x,y), \eta(x,y))$ quando o Jacobiano $[\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x](x,y) \neq 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Lema: o tipo da EDP de 2ª ordem é invariante a mudanças de coordenada.

Prova: Escreva $w(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$.

$$\begin{cases} u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x \\ u_y = w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y \\ u_{xx} = w_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_x^2 + w_\xi \xi_{xx} + w_\eta \eta_{xx} \\ u_{yy} = w_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + w_{\eta\eta}\eta_y^2 + w_\xi \xi_{yy} + w_\eta \eta_{yy} \\ u_{xy} = w_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + w_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + w_\xi \xi_{xy} + w_\eta \eta_{xy} \end{cases}$$

Com isso, chegamos em

$$\ell[w] := A w_{\xi\xi} + 2B w_{\xi\eta} + C w_{\eta\eta} + D w_\xi + E w_\eta + F w = G,$$

em que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}.$$

Assim $AC - B^2 = J^2(ac - b^2) = -J^2\delta(L) \Rightarrow \delta(\ell) = J^2\delta(L)$.

Forma canônica:

- Hiperbólica: $\ell[w] = w_{\xi\eta} + \ell_1[w] = G(\xi,\eta)$ ↗ first order linear operator
- Parabólica: $\ell[w] = w_{\xi\xi} + \ell_1[w] = G(\xi,\eta)$
- Elíptica: $\ell[w] = w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \ell_1[w] = G(\xi,\eta)$

Suponha que a equação é hiperbólica. Então existe um sistema de coordenadas (ξ,η) tal que a equação esteja na forma canônica. Em particular, esse sistema satisfaz

$$\begin{cases} a\xi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\,\xi_y = 0 \\ a\eta_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\,\eta_y = 0 \end{cases}$$

Equações características: $\frac{dx}{dt} = a,\quad \frac{dy}{dt} = b \boxed{\pm} \sqrt{b^2-ac},\quad \frac{d\xi}{dt} = 0,\quad \frac{d\eta}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$$ ↪ 2 famílias de características de L.

Suponha que a equação é parabólica. Então existe um sistema de coordenadas (ξ,η) tal que a equação tem a forma canônica. Com isso η satisfaz

$$a\eta_x + b\eta_y = 0$$ ↗ 1 família de características

e, portanto, η é constante na curva $dy/dx = b/a$.

Assuma agora que os coeficientes a, b, c são funções analíticas em D, i.e.,

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k-j}(x-x_0)^j (y-y_0)^{k-j}$$

para cada ponto $(x_0,y_0) \in D$ é convergente em $B_r(x_0,y_0)$. Suponha que a equação é elíptica. Então existe um sistema de coordenadas na forma canônica. Equações elípticas não tem características. Temos de lidar com equações complexas (por isso precisamos da analiticidade). As soluções são constantes em

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a},$$

$\xi = \mathrm{Re}\,\phi,\ \eta = \mathrm{Im}\,\phi.$