PhD Equações Diferenciais Parciais e Aplicações 2023.1

Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Guilherme Tegoni Goedert
Monitor Lucas Machado Moschen Entrega 14/04/2023

Lista 1

Exercício 1 Considere o sistema

$$\begin{aligned} u_x &= (3+\epsilon)x^2y + y, \\ u_y &= x^3 + x, \\ u(0,0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Mostre que, se $\epsilon = 0$, o sistema admite uma única solução u de classe C^2.

(b) Prove que para $\epsilon \neq 0$, o sistema não admite solução de classe C^2.

Solução 1. Considere inicialmente que $\epsilon = 0$. Integrando a primeira questão com respeito a x, temos que

$$u(x,y) = x^3y + xy + f(y),$$

para uma função f de classe C^2. Portanto,

$$u_y = x^3 + x + f'(y) = x^3 + x \implies f'(y) = 0$$

e, então $f(y) = c$. Com isso,

$$u(x,y) = x^3y + xy,$$

pois facilmente vemos que $c = 0$. É claro que essa é a única solução para o sistema. Agora, se $\epsilon \neq 0$, veja que

$$u_{xy} = (3+\epsilon)x^2 + 1 \neq u_{yx} = 3x^2 + 1.$$

Pelo Teorema de Schwartz, temos um absurdo e, portanto, tal função u não pode existir. Concluímos que com uma pequena modificação nas equações, saímos de um problema com solução para outro sem.

Exercício 2 Considere a EDP

$$au_x + bu_y = 0 \tag{2}$$

e suponha que toda solução de (2) satisfaça $u(1,2) = u(3,6)$. Calcule o valor de b/a supondo que $a \neq 0$.

Solução 2. Reescreva a EDP como

$$\nabla u \cdot (a, b) = 0,$$

isto é, a derivada direcional de u na direção (a, b) é 0. Com isso, todas as soluções são constantes ao longo das retas definidas pela direção (a, b) que podem ser escritas como

$$y(x) = \frac{b}{a}x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Visto que $u(1, 2) = u(3, 6)$ para todas soluções, os pontos $(1, 2)$ e $(3, 6)$ estão na mesma reta com direção (a, b). Logo

$$6 - \frac{b}{a}3 = 2 - \frac{b}{a}1 \implies \frac{b}{a} = 2.$$

Exercício 3 Seja a função u a densidade de uma quantidade **em equilíbrio** em um conjunto aberto U. Suponha que o fluxo da densidade F satisfaz a seguinte relação:

$$F = -a\nabla u, \text{ para } a > 0,$$

visto que o fluxo vem de regiões mais concentradas para menos concentradas. Usando o fato de que para toda subregião $V \subset U$, o fluxo líquido através de ∂V é zero, derive a equação de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

Solução 3. A hipótese de equilíbrio garante que

$$\int_{\partial V} F \cdot \vec{n}\, dS = 0,$$

em que $\vec{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para fora. Pelo Teorema do divergente,

$$0 = \int_{\partial V} F \cdot \vec{n}\, dS = \int_V \operatorname{div} F\, dV$$

para toda região V. Pelo Lema 1.1 provado, que pode ser estendido para n dimensões,

$$0 = \operatorname{div} F = -a \operatorname{div}(\nabla u) = -a\Delta u \implies \Delta u = 0.$$

Exercício 4 Considere a equação do calor com condição inicial:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

em que g é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. A ideia deste exercício é prover uma solução suave para a equação em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Para isso, defina as funções

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \mathbb{1}(t > 0).$$

e

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)g(y)\,dy.$$

Mostre que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ e que satisfaz a equação do calor

$$u_t = \Delta u, \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Ademais, demonstre que

$$\lim_{(x,t)\to(a,0^+)} u(x,t) = g(a), \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

Solução 4. Inicialmente, vamos verificar que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Como φ é uma composição de funções suaves, ela é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$. Considerando $t \in [\delta,\infty)$ para $\delta > 0$, as derivadas de φ são uniformemente limitadas, isto é, existe uma função integrável que limita suas derivadas. Em particular, isso implica que podemos usar o Teorema da Convergência dominada para trocar a derivada pela integral e, portanto, vale que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

Veja que

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi_t(x-y,t) - \Delta\varphi(x-y,t)]g(y)\,dy.$$

Só que

$$\begin{aligned}\varphi_t(x-y,t) - \Delta\varphi(x-y,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\|x-y\|^2/4t} \frac{1}{4t^2}\left(\|x-y\|^2 - 2nt\right) \\ &\quad - \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\left(-\frac{n}{2t} + \frac{\|x-y\|^2}{4t^2}\right) e^{-\|x-y\|^2/4t} \\ &= 0,\end{aligned}$$

como podemos facilmente observar usando o resultado de que $\Delta u(x) = \frac{n-1}{\|x\|}v'(\|x\|) + v''(\|x\|)$ se $u(x) = v(\|x\|)$ dado aqui, por exemplo. Isso mostra que $u_t - \Delta u = 0$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Por fim, falta demonstrar que a solução tende a condição inicial quando $t \to 0$, o que leva a sua continuidade se definirmos $u(x,0) = g(x)$.

Tome $a \in \mathbb{R}^n$ e fixe $\epsilon > 0$. Pela continuidade de g, escolha δ de forma que

$$|y-a| < \delta \implies |g(y) - g(a)| < \epsilon/2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}|u(x,t) - g(a)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)g(y)\,dy - g(a)\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)[g(y)-g(a)]\,dy\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)|g(y)-g(a)|\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n - B(a,\delta)} \varphi(x-y,t)|g(y)-g(a)| + \int_{B(a,\delta)} \varphi(x-y,t)|g(y)-g(a)|\,dy,\end{aligned}$$

em que a segunda igualdade se deve ao fato de que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t)\, dy = 1,$$

pois é a densidade da distribuição normal centrada em x. Note que

$$\int_{B(a,\delta)} \varphi(x-y,t)|g(y)-g(a)|\, dy < \frac{\epsilon}{2}\int_{B(a,\delta)} \varphi(x-y,t) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, vamos mostrar que a primeira integral também é limitada usando o fato que se tomarmos xx suficientemente perto de a, isto é, $\|x-a\| \leq \delta/2$ e $\|y-a\| \geq \delta$, temos que

$$\|y-a\| \leq \|y-x\|+\|x-a\| \leq \|y-x\|+\delta/2 \leq \|y-x\|+\|y-a\|/2 \implies \|y-x\| \geq \|y-a\|/2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n - B(a,\delta)} \varphi(x-y,t)|g(y)-g(a)| &\leq 2\|g\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n - B(a,\delta)} \varphi(x-y,t)\, dy \\
&= \frac{2\|g\|_{L^\infty}}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n - B(a,\delta)} e^{-\|x-y\|^2/4t}\, dy \\
&\leq \frac{2\|g\|_{L^\infty}}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n - B(a,\delta)} e^{-\|y-a\|^2/16t}\, dy \\
&= \frac{2\|g\|_{L^\infty}}{(4\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\delta/\sqrt{t})} e^{-\|z\|^2/16}\, dz < \epsilon/2,
\end{aligned}$$

tomado t suficientemente pequeno, visto que $B(0,\delta/\sqrt{t}) \to \mathbb{R}^n$. Note que a última igualdade vem da traformação $z = (y-a)/\sqrt{t}$ cujo jacobiana é $\sqrt{t}I_n$. Isso mostra que $|u(x,t)-g(a)| < \epsilon$ tomando t suficientemente pequeno e x suficientemente próximo de a.