PhD Equações Diferenciais Parciais e Aplicações 2023.1

Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Guilherme Tegoni Goedert
Monitor Lucas Machado Moschen Entrega 05/05/2023

Lista 2

Exercício 1 (Capítulo 3.2 — Evans) Considere a equação diferencial parcial (EDP)

$$F(Du(x), u(x), x) = 0,$$

para $x \in U$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, e a condição de fronteira $u(x) = g(x)$ para $x \in \Gamma$, em que $\Gamma \subseteq \partial U$. Generalize o método das características coberto no capítulo 2 do livro para n dimensões, isto é, descreva curvas $\gamma : I \to U$ em que, ao longo delas, a solução $z(s) := u(\gamma(s))$ tenha uma estrutura mais simples e, portanto, reduzindo a EDP em um sistema de EDOs.

Solução 1. Ver página 97 a 98 do capítulo 3.2 do livro do Evans.

Exercício 2 Seja $p \in \mathbb{R}$. Considere a EDP

$$xu_x(x, y) + yu_y(x, y) = \lambda u(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Encontre as curvas características para esta equação.

(b) Considere que $\lambda = 4$ e $u(x, y) = 1$ para todo (x, y) tal que $x^2 + y^2 = 1$, e encontre uma solução explícita.

(c) Considere que $\lambda = 2$ e $u(x, 0) = x^2$ para todo $x > 0$. Encontre duas soluções com essa condição. Esse resultado contradiz o teorema de existência e unicidade?

Solução 2. Reescrevo a equação na curva característica projetada $s \mapsto (x(s), y(s))$.

$$x(s)p(s) + y(s)q(s) = \lambda z(s).$$

(a) Com isso, as curvas características são

$$\begin{aligned}
\dot{x}(s) &= x(s) \\
\dot{y}(s) &= y(s) \\
\dot{z}(s) &= x(s)p(s) + y(s)q(s) = \lambda z(s) \\
\dot{p}(s) &= (\lambda - 1)p(s) \\
\dot{q}(s) &= (\lambda - 1)q(s)
\end{aligned}$$

Resolvendo as primeiras duas equações, a família de curvas características projetadas é $x(s) = x(0)e^s$ e $y(s) = y(0)e^s$, isto é, são retas com velocidade e^s na direção $(x(0), y(0))$. Nessas curvas a solução é $z(s) = z(0)e^{\lambda s}$.

(b) Note que todas as retas passam pelo círculo unitário uma única vez. Parametrizamos o círculo unitário fazendo $x_r(0) = \cos(r)$ e $y_r(0) = \sin(r)$. Quando $s = 0$, a curva passa exatamente sobre o círculo unitário e, portanto, $z_r(0) = 1$ para todo r. Com isso

$$z_r(s) = e^{\lambda s}, x_r(s) = \cos(r)e^s, y_r(s) = \sin(r)e^s,$$

isto é, $x(s)^2 + y(s)^2 = e^{2s} \implies s = \log(x^2 + y^2)/2$. Portanto, a solução é

$$u(x, y) = e^{2\log(x^2+y^2)} = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

(c) Aqui parametrizamos a condição inicial como $x_r(0) = r$, $y_r(0) = 0$ e $z_r(0) = r^2$. Note que ela só dá informação sobre uma reta, $x_r(s) = re^s, y_r(s) = 0$ e $z_r(s) = r^2e^{2s}$. Uma solução é, portanto,

$$u(x, y) = x^2.$$

Outra solução que podemos pensar é

$$u(x, y) = (x + y)^2.$$

que respeita as equações características e condições iniciais. Note que a equação e a curva inicial não satisfazem a condição de transversalidade para nenhum r, pois

$$\frac{d}{dr}y_r(0) = 0, \frac{d}{ds}y_r(0) = y_r(0) = 0 \implies J|_{s=0} = 0.$$

Exercício 3 Considere a EDP de primeira ordem dada pela equação

$$u_x(x, y) - \frac{e^x}{1 + e^y}u_y(x, y) = 0, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

Descreva as equações características dessa EDP e encontre a solução com a condição inicial $u(x, 0) = e^{2x}$.

Solução 3. As equações características dessa EDP são

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= 1 \\
\dot{y}(t) &= -\frac{e^{x(t)}}{1 + e^{y(t)}} \\
\dot{z}(t) &= p - \frac{e^{x(t)}}{1 + e^{y(t)}}q(t) = 0 \\
\dot{p}(t) &= \frac{e^{x(t)}}{1 + e^{y(t)}}q(t) \\
\dot{q}(t) &= -\frac{e^{x(t)+y(t)}}{(1 + e^{y(t)})^2}q(t)
\end{aligned}.$$

A família de curvas características projetadas tem como solução

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{1 + e^y} \implies (1 + e^y)dy = -e^x dx,$$

que integrando tem solução

$$y + e^y = -e^x + C,$$

em que $C > y + e^y$ é uma constante. Com isso, as curvas são do tipo

$$x = \log(C - y - e^y).$$

Nessas curvas, as soluções são constantes.

Suponha que parametrizamos a curva inicial por $(r, 0)$. Portanto, quando $y = 0$, temos que $r = \log(C - 1) \implies C = e^r + 1$. Nessa curva, $z_r(0) = e^{2r}$. Com isso,

$$u(x, y) = z_r(0) = (e^x + e^y + y - 1)^2.$$

Exercício 4 Mostre que as únicas funções de classe C^1 que satisfazem a equação de Burgers

$$u_t + uu_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

são monotônicas não-decrescentes em x para cada $t > 0$. Conclua que se $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u_0'(\bar{x}) < 0$ para algum $\bar{x}$, a equação e Burgers não pode ter solução clássica para todo $t > 0$.

Solução 4. Suponha que exista uma solução u de classe C^1 que satisfaça a equação de Burgers. Nesse caso, seja $z(s) = u(x(s), t(s))$. Note que

$$\frac{d}{ds} z(s) = u_t(x, t) t_s(s) + u_x(x, t) x_s(s) = 0, \forall s > 0,$$

quando fazemos $t_s(s) = 1$ e $x_s(s) = u(x(s), t(s))$. Portanto, as curvas características projetadas são

$$\frac{dx}{dt}(t) = u(x(t), t), x(t_0) = x_0,$$

para (x_0, t_0) fixado com $t_0 > 0$, que tem solução única dada por

$$x(t) = x_0 + \int_{t^*}^{t} u(x(s), s)\, ds$$

Ao longo dessa curva a solução u é constante. Portanto, $x(t) = x_0 + (t - t^*)u(x_0, t^*)$.

Suponha que exista $t^* > 0$ e $a < b$ tal que $u(a, t^*) > u(b, t^*)$. Assim, na reta

$$x_a(t) = a + (t - t^*)u(a, t^*)$$

a solução é $u(a, t^*)$ e na reta

$$x_b(t) = b + (t - t^*)u(b, t^*)$$

a solução é $u(b, t^*)$. Veja que

$$a + t^* u(b, t^*) < b + t^* u(a, t^*) \implies a - t^* u(a, t^*) < b - t^* u(b, t^*).$$

Com isso, para $t = 0$, tem-se $x_a < x_b$. Entretanto, como $u(a, t^*) > u(b, t^*)$, para T suficientemente grande, $x_a(T) = x_b(T)$, o que implica que as retas se encontram. Isso mostra que u não pode ser de classe C^1 e ser monotonicamente não-decrescente em x para todo $t > 0$.

Exercício 5 Assuma que $F(0) = 0$ e que u é solução fraca contínua da lei de conservação

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que u tem suporte compacto em $\mathbb{R} \times [0, T]$ para cada $T > 0$. Prove que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx,$$

para $t > 0$.

Solução 5. Por solução fraca nos referimos a $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ tal que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u(x,t)v_t(x,t) + F(u(x,t))v_x(x,t)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty g(x)v(x,t)\, dx|_{t=0} = 0$$

para toda função teste v que seja suave com suporte compacto. Fixe $\tau > 0$ e defina $h_\tau(x) = u(x, \tau)$. Observe que u também é uma solução integral para o problema

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (\tau, \infty) \\ u(x, \tau) = h_\tau(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

isto é,

$$\int_\tau^\infty \int_{-\infty}^\infty u(x,t)v_t(x,t) + F(u(x,t))v_x(x,t)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty h_\tau(x)v(x,t)\, dx|_{t=\tau} = 0.$$

Portanto

$$\int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty uv_t + F(u)v_x\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty gv\, dx|_{t=0} - \int_{-\infty}^\infty h_\tau v\, dx|_{t=\tau} = 0. \tag{1}$$

Seja $U_\tau \times [0, \tau]$ o suporte compacto de u. Quando $x \notin U_\tau$, temos que $u = 0$ e, portanto, $F(u(x,t)) = F(0) = 0$ para todo $t \in [0, \tau]$. Isso mostra que F tem suporte compacto como função de x. Defina a função de teste $v(x,t) = 1$ quando $x \in V_\tau \times [0, \tau]$ em que $V_\tau \supset U_\tau \cup \text{supp}(g)$ é um conjunto aberto e v seja uma função suave com suporte compacto (*bump function*). Com isso, $v_t = v_x = 0$ sempre que $u \neq 0$. Portanto, a equação em (1) se reduz a

$$\int_{-\infty}^\infty g(x)\, dx = \int_{-\infty}^\infty g(x)v(x,0)\, dx = \int_{-\infty}^\infty u(x,\tau)v(x,\tau)\, dx = \int_{-\infty}^\infty u(x,\tau)\, dx.$$

Exercício 6 Considere a equação de segunda ordem

$$xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0.$$

(a) Encontre o domínio em que esta equação é elíptica e o domínio em que é hiperbólica.

(b) Para cada um desses domínios, encontre a transformação canônica correspondente.

Solução 6. Temos para esse exemplo que $a(x,y) = x$, $b(x,y) = 0$ e $c(x,y) = -y$. Além disso, $d(x,y) = 1/2$, $e(x,y) = -1/2$ e $f = g = 0$. O discriminante é

$$\delta(x,y) = xy.$$

(a) Quando $xy > 0$, isto é $x, y > 0$ ou $x, y < 0$, a equação é hiperbólica. Quando $xy < 0$, isto é, $x > 0, y < 0$ ou $x < 0, y > 0$, a equação e elíptica. Por fim, se $x = 0$ ou $y = 0$, a equação é parabólica.

(b) Primeiro façamos o caso hiperbólico, isto é, quando $xy > 0$. As equações características são

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{xy}}{x}.$$

Para resolver essas equações, fazemos

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{x}} \implies 2\sqrt{y} = \pm 2\sqrt{x} + C \implies \sqrt{y} \pm \sqrt{x} = C.$$

Considere as novas coordenadas $(\xi, \nu) = (\sqrt{y} + \sqrt{x}, \sqrt{y} - \sqrt{x})$. Vamos checar a equação nessas coordenadas com $w(\xi, \nu) = u(x,t)$.

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{2\sqrt{x}}w_\xi - \frac{1}{2\sqrt{x}}w_\nu \\
u_y &= \frac{1}{2\sqrt{y}}w_\xi + \frac{1}{2\sqrt{y}}w_\nu \\
u_{xx} &= -\frac{1}{4x^{3/2}}w_\xi + \frac{1}{4x}w_{\xi\xi} - \frac{1}{4x}w_{\xi\nu} + \frac{1}{4x^{3/2}}w_\nu - \frac{1}{4x}w_{\nu\xi} + \frac{1}{4x}w_{\nu\nu} \\
u_{yy} &= -\frac{1}{4y^{3/2}}w_\xi + \frac{1}{4y}w_{\xi\xi} + \frac{1}{4y}w_{\xi\nu} - \frac{1}{4y^{3/2}}w_\nu + \frac{1}{4y}w_{\nu\xi} + \frac{1}{4y}w_{\nu\nu},
\end{aligned}$$

que ao substituir na equação inicial fica

$$w_{\xi\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{w_\xi - w_\nu}{\sqrt{x}}\right) = 0.$$

Para o caso elíptico, quando $xy < 0$, como a, b, c são funções analíticas por serem infinitamente diferenciáveis, as curvas características complexas são solução de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{xy}}{x}$$

que tem solução, como antes, $\sqrt{y} \pm \sqrt{x} = C$. Nesse caso, quando $y < 0$, as variáveis canônicas são $(\xi, \nu) = (\sqrt{x}, \sqrt{-y})$. Já quando $x < 0$, $(\xi, \nu) = (\sqrt{y}, \sqrt{-x})$. Suponha $x < 0$ para verificar a equação nessas coordenadas:

$$\begin{aligned}
u_x &= -\frac{1}{2\sqrt{-x}}w_\nu \\
u_y &= \frac{1}{2\sqrt{y}}w_\xi \\
u_{xx} &= -\frac{1}{4(-x)^{3/2}}w_\nu - \frac{1}{4x}w_{\nu\nu} \\
u_{yy} &= -\frac{1}{4y^{3/2}}w_\xi + \frac{1}{4y}w_{\xi\xi}
\end{aligned}$$

que ao substituir na equação inicial fica

$$w_{\nu\nu} + w_{\xi\xi} + 2(-x)^{-1/2} w_{\nu} = 0.$$

Algo semelhante ocorre quando $y < 0$.