Equação da onda 1D

velocidade da onda

$$u_{tt} - \boxed{c}^2 u_{xx} = 0,$$

$x \in (a,b) \subseteq (-\infty, \infty)$, $t > 0$. Defina $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$. Assim, a equação se reduz a

$$-4c^2 w_{\xi\eta} = 0.$$

backward wave   forward wave

Logo $w(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) \Rightarrow u(x,t) \overset{(*)}{=} F(x+ct) + G(x-ct)$. Então, se u é solução, então existem $F, G \in C^2$ tal que $(*)$ valha.

Obs.: singularidades não são suavizadas em equações hiperbólicas, mas viajam ao longo das curvas características.

modela a vibração de uma corda ideal infinita.

Agora seja $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Assim, a fórmula d'Alembert dá a solução

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds,$$

em que
$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\, ds + \frac{C}{2}$$
$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\, ds - \frac{C}{2}$$

- Uma solução clássica é uma função de classe C^2 $\forall t > 0$ que satisfaça a equação da onda com condições iniciais.

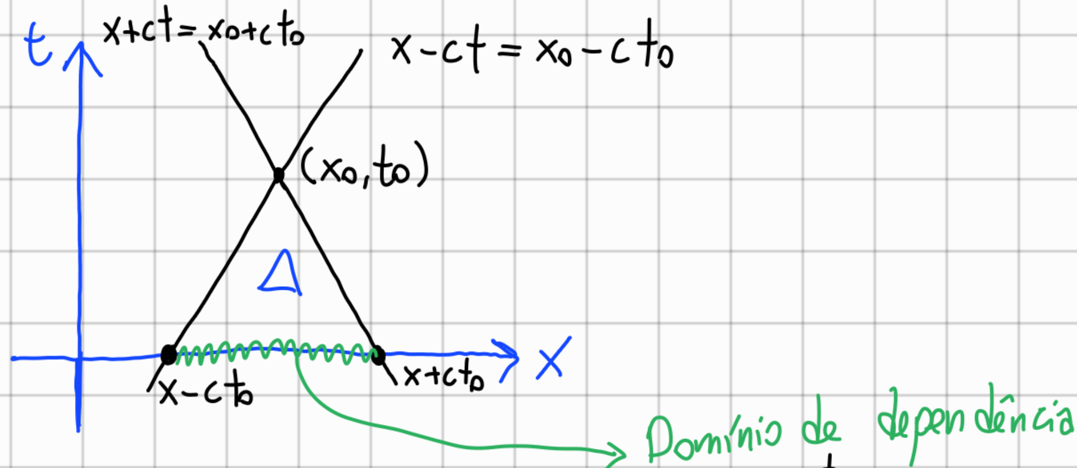
Teorema: Fixe $T > 0$. O problema

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0; \quad u(x,0) = f(x); \quad u_t(x,0) = g(x),$$

$x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ é bem posto.

Obs.: O problema de Cauchy é mal posto em $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Triângulo característico: Seja (x_0, t_0). É o triângulo definido por $(x_0 - ct_0, 0)$, $(x_0 + ct_0, 0)$ e (x_0, t_0)



$$u(x_0, t_0) = \frac{f(x_0 + ct_0) + f(x_0 - ct_0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} g(s)\, ds$$

Região de influência: Conjunto dos pontos que são influenciados pelos dados iniciais em um intervalo fixo $[a,b]$.

$$[a,b] \text{ influencia } (x_0, t_0) \iff [x_0 - ct_0, x + ct_0] \cap [a,b] \neq \emptyset$$

Logo $R_{[a,b]} = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : x - ct \leq b \text{ e } x + ct \geq a\}$.

Caso não-homogêneo:
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) & \to \text{força externa} \\ u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Proposição: Esse problema tem no máximo uma solução.

Dem.: Suponha que u_1 e u_2 sejam soluções e defina $u = u_1 - u_2$ que é solução do problema homogêneo correspondente com condição inicial $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = 0$. Com isso, $v(x,t) = 0$ também é solução. Pela unicidade no caso homogêneo, $u = v = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

Aqui a solução explícita em (x,t) é

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$\Delta \to$ Triângulo característico

$\Downarrow$

Domínio de dependência no caso não homogêneo