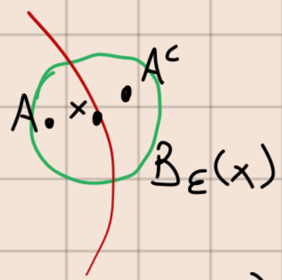
Monitoria 07/07/2022

- (X, d) espaço métrico. $A \subseteq X$ é densо em X se
$$\bar{A} = X,$$
ou seja, $\forall x \in X$ e $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.
Em particular, existe $(a_n) \subseteq A$ com $\lim a_n = x$.

- (X, d) espaço métrico e $A \subseteq X$. A fronteira de A é definida como $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$,
$$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$$



Para $\varepsilon = 1/n$, encontramos $(x_n) \subseteq A$ com $x_n \to x$ e $(y_n) \subseteq A^c$ com $y_n \to y$.
$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$$

- Questão 20: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ contínua
Para as métricas
$$d(x,y) = |x-y| \quad \text{e} \quad d(x,y) = \mathbb{1}(x \neq y),$$
$B_\varepsilon(x) = \{x\}$ para $\varepsilon < 1$, logo
$$f(B_\varepsilon(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$$
trivialmente.

Definimos espaço discreto como espaço cujos conjuntos unitários são discretos, isto é, $\{x\}$ é aberto, $\forall x \in X$.

Pergunta: Existe $(\mathbb{N}, d)$ que não seja discreto?
Ou seja, $\exists x \in \mathbb{N}$ com $\{x\}$ não sendo aberto.

Para $x \in \mathbb{N}$, $\delta := \inf_{y \in \mathbb{N} \setminus \{x\}} d(x,y)$. Se $\delta > 0$,

$B_\delta(x) = \{x\}$ e pronto. Mas e se $\delta = 0$? Isso é possível? Questão em aberto

Será que contradiz Axioma 3?

Para isso, existe sequência $\{x_n\}$ com $d(x, x_n) \to 0$.
Podemos tomar uma subsequência crescente, nesse caso, dado que $\{x_n\}$ não pode ser limitado.

Contra intuitivo: $d(x, x_n) \to 0$ e $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$!
$|x - x_n| \to +\infty$,
mas contradiz Axioma 3?

Obs.: Vamos provar que normas em $\mathbb{R}$ são equivalentes, logo métricas derivadas de normas são equivalentes:

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Esse tipo de métrica não permite que $d(x, x_n) \to 0$.
Mas e outro tipo de métrica?

(X,d) espaço métrico. Seja $\mathcal{A} := \{A : A \subseteq X\}$.

Definimos $\leq$ em $\mathcal{A}$ como $A \leq B \iff A \subseteq B$. Essa relação define uma ordem parcial:

1. Reflexidade: $A \leq A$, pois $A \subseteq A$.
2. Antissimetria: $A \leq B$ e $B \leq A \Rightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$
$\Rightarrow A = B$
3. Transitividade: $A \leq B$, $B \leq C \Rightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq C$
$\Rightarrow A \subseteq C$
$\Rightarrow A \leq C$

$\leq$ Não é ordem total, isto é,
$$A \leq B \text{ ou } B \leq A$$
não é verdade $\forall A, B \in \mathcal{A}$.

Elemento maximal: $A \in \mathcal{A}$ é elemento maximal de $\mathcal{A}$ se $A \leq Y \Rightarrow A = Y$.

Exercício 12: Fixe $A \subseteq X$.
$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \text{ é fechado e } A \subseteq F\}$$
$$\mathcal{O} = \{O \subseteq X : O \text{ é aberto e } O \subseteq A\}$$

$\bar{A}$ é elemento minimal de $\mathcal{F}$ e A° é maximal de $\mathcal{O}$.

Exercício 14: $A \subseteq \mathbb{Q}$ e $x \in \mathring{A}$,
$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{Q} : |x-y| < r\} \subseteq A,$$
mas $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, logo, existem infinitos racionais em $(x-r, x+r)$.