Monitoria 26/07/2022

Teorema: $\mathcal{F} \subseteq \overset{\text{completo}}{\overbrace{C[a,b]}}$ é relativamente compacto (totalmente limitado) se $\mathcal{F}$ é uniformemente limitado (totalmente limitado) e equicontínuo.

Se $\mathcal{F}$ é fechado $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ é compacto.
"$\overline{\mathcal{F}}$"

$\exists M;\ |f(x)| \leq M,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall x \in [a,b]$

$\mathcal{F}[a,b] = \{ f(x) : x \in [a,b],\ f \in \mathcal{F} \}$ é limitado

totalmente limitado $\overset{\text{completo}}{\Rightarrow}$ relativamente compacto
$\Leftarrow$

• totalmente limitado $\Leftrightarrow$ limitado em $\mathbb{R}^n$

$\forall \varepsilon > 0,\ \delta > 0,\ \forall f,\ \forall x_1, x_2$
$d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(y_1, y_2) < \varepsilon$

$f : X \to Y, \quad \mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$
$\mathcal{F}K \subseteq Y, \quad K$ compacto
↳ relativamente compacto

46. K compacto
$f_n(x) \to f(x),\ \forall x \in K$

$f_n(x) = x^n,\ x \in (0,1)$
$\to 0$

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n$

$f_n \to f \equiv 0$

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)|$$

$$= \sup_{x\in(0,1)} |x^n| = 1$$

$$d(f_n, f) = \max_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\boxed{K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{\delta_x}(x) \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_{x_i}}(x_i)}$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq (|f_n(x) - f_{n_i}(x)|) < \varepsilon/3$$

$$+ \boxed{|f_{n_i}(x_i) - f(x_i)|} < \varepsilon/3$$

$$+ \boxed{|f(x_i) - f(x)|} \to x \in B_{\delta_{x_i}}(x_i) < \varepsilon/3$$

Take $\varepsilon > 0$

- $N_x \in \mathbb{N};\ n \geq N_x \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$
- $\delta'_x > 0;\ f_{N_x}(B_{\delta'_x}(x)) \subseteq B_{\varepsilon/3}(f_{N_x}(x))$
- $\delta''_x > 0,\ f(B_{\delta''_x}(x)) \subseteq B_{\varepsilon/3}(f(x))$
- $\delta_x = \min\{\delta'_x, \delta''_x\} > 0$

- $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\delta_x}(x) \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_{x_i}}(x_i)$

$N = \max\{N_{x_i}\}$. Tome $x \in K$ e $x \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$

- $f_n < f_{n+1}$. Tome $n \geq N$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_N(x)|$$
$$\leq |f(x) - f_{N_{x_i}}(x)|$$
$$\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_{N_{x_i}}(x_i)| + |f_{N_{x_i}}(x_i) - f_{N_{x_i}}(x)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(f_n, f) < \varepsilon$$

crescente por equicontinuidade de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\mathbb{R} := \mathbb{Q} / \sim,$$
$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Teorema: ℓ^∞ é completo, mas não separável

$(x_n) \subseteq \mathbb{R}^\infty$, $\sup |x_n| \leq c$

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \qquad (e_i)_j \xrightarrow{i \to \infty} 0, \forall j,$$

mas $e_i \not\to (0, \dots, 0)$

$$d(e_i, 0) = 1$$

(x_n) sequência de Cauchy , $\|x_n\| \leq c$

$\{(x_n)_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy $\Rightarrow$ convergente

$$(x^*)_j = \lim_{n\to\infty} (x_n)_j .$$

$\exists M \in \mathbb{N}: \quad m, n \geq M \Rightarrow \|x_n - x_m\| < 1$

$\Rightarrow D = \max\{\|x_j\|\}_{j=1}^{M},$

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_M\| + \|x_M\|$$
$$\leq \max\{D, 1+\|x_M\|\}, \forall n$$

Existe $c \in \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|(x_n)_j| \leq \|x_n\| \leq c$$

$\lim |(x_n)_j| \leq c \Rightarrow \|x^*\| \leq c \Rightarrow x^* \in \ell^\infty$

$\forall j$, m grande, $m = n+K$

$$\|(x^*)_j - (x_n)_j\| < \|(x^*)_j - (x_m)_j\| + \|(x_m)_j - (x_n)_j\|$$
$$< \varepsilon/2 + \|x_m - x_n\|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\Rightarrow x_n \longrightarrow x^*$

- ℓ^∞ não é separável (48)

Existe uma quantidade de bolas não enumerável disjunta

$\lambda \in \{1, 0\}^{\mathbb{N}} \subseteq l^\infty$ 48

$(B_{1/2}(\lambda))$