Análise Funcional 2022
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Maria Soledad Aronna
Monitor Lucas Machado Moschen 13 de julho de 2022

Lista Espaços Métricos

Denotamos $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, $R_+ = (0, \infty)$, $Q_+ = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$ e $Z_+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$. Seja $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico.

Exercício 1 Prove os exercícios dados em sala de aula.

Exercício 2 Dados $x, y, z \in \mathcal{X}$, prove que

$$d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|.$$

E que se $d(x, z) > d(z, y)$, então $x \neq y$.

Exercício 3 Dados n pontos $x_1, \dots, x_n$ em $\mathcal{X}$, prove que

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Exercício 4 Prove que $(\mathcal{X}, d)$ é um espaço métrico para os seguintes casos:

(a) $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ e $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

(b) $\mathcal{X} = C[a, b]$ (conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$) e

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

para $f, g \in \mathcal{X}$.

(c) $\mathcal{X}$ é um conjunto qualquer e

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

(d) $\mathcal{X} = l_2$ é o espaço das sequências $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ de números reais que satisfazem $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ e a distância é dada pela fórmula $d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

Exercício 5 Mostre que se d é uma métrica, as funções $2d$ e $d/(1 + d)$ também são métricas. Além do mais, d^2 é uma métrica?

Exercício 6 Seja $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ uma função crescente com $\varphi(0) = 0$ e subaditiva, isto é, para todo $t, s \in \mathbb{R}_0^+$, vale que $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$. Se (M, d) é um espaço métrico, mostre que

$$\begin{aligned} d' :& M \times M \to \mathbb{R}^+ \\ &(x, y) \mapsto d'(x, y) = \varphi(d(x, y)) \end{aligned}$$

é uma métrica sobre M.

Exercício 7 Determine se as seguintes funções são métricas em $\mathbb{R}$, para $s, t \in \mathbb{R}$,

(a) $\varphi_1(t, s) = \sqrt{|t - s|}$

(b) $\varphi_2(t, s) = |t^2 - s^2|$

(c) $\varphi_3(t, s) = |t - 2s|$

Exercício 8 Mostre que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, pode ser escrito como a união enumerável de intervalos abertos disjuntos. *Dica: que conjunto é denso nos reais e enumerável?*

Exercício 9 Mostre que em todo espaço métrico, um conjunto finito de pontos é fechado.

Exercício 10 O conjunto de Cantor é um conjunto na reta descoberto por Henry Smith em 1874 e introduzido por Georg Cantor em 1883 que apresenta uma série de propriedades contra-intuitivas[1]. Para construí-lo, inicie com o intervalo $[0, 1]$. Reparta-o em três segmentos iguais e remova o intervalo aberto do meio $(1/3, 2/3)$, restando o conjunto $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Remova o intervalo aberto do meio de cada segmento, restando $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Continue esse processo indefinidamente e obtemos o conjunto $\mathcal{C}$. Mostre que $\mathcal{C}$ é fechado.

Exercício 11 Tome $\mathcal{X} = C[a, b]$ e fixe $L > 0$. Mostre que o conjunto

$$A = \{f \in \mathcal{X} | |f(x)| < L, \forall x \in [a, b]\}$$

é aberto em $\mathcal{X}$ com a métrica máximo introduzida no Exercício 4.

Exercício 12 Definimos a relação no espaços dos subconjuntos de um espaço métrico como $A \leq B \iff A \subseteq B$. Note que essa relação é uma ordem parcial[2] nos subconjuntos, mas não estabelece uma ordem total (verifique!). Prove que $\bar{A}$ é o menor conjunto fechado que contém A, isto é, $\bar{A}$ é fechado que contém A e se F é fechado que contém A, então $\bar{A} \subseteq F$. Além disso, $\mathring{A}$ é o maior conjunto aberto que está contido em A, isto é, $\mathring{A}$ é aberto contido em A e se O é fechado que está contido em A, então $\mathring{A} \subseteq O$.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set`

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Partially_ordered_set`

Exercício 13 Dê um exemplo de um espaço métrico e uma família de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que
$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

Exercício 14 Considere $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ e $d(x,y) = |x-y|$. Mostre que um ponto interior de um subconjunto A é um ponto limite. O mesmo vale para $\mathcal{X} = \mathbb{Q}$?

Exercício 15 Num espaço métrico, defina a noção de distância de um ponto a um conjunto como
$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a).$$
Mostre que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $d(x,A) = 0$.

Exercício 16 Um ponto $x \in A^c$ é dito *ponto exterior* de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A^c$. Mostre que A^c tem a mesma fronteira que A e que seu interior coincide com o exterior de A, ou seja, $(\overline{A})^c = (\overset{\circ}{A^c})$. Conclua que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Exercício 17 Sejam $(\mathcal{X}, d_X)$ e $(\mathcal{Y}, d_Y)$ espaços métricos. Mostre que $(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}, d)$ com $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$ é um espaço métrico. Além disso, mostre que uma sequência $\{(x_n,y_n)\}$ converge em $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ se, e somente se, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são convergentes em seus respectivos espaços.

Exercício 18 Mostre que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Exercício 19 Seja $\mathcal{X} = C[a,b]$ munido da métrica máximo introduzida no Exercício 4 e A o conjunto dos polinômios definidos em $[a,b]$. Mostre que A é denso em $\mathcal{X}$.

Exercício 20 Mostre que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é contínua para qualquer função f.

Exercício 21 Mostre que a intersecção de dois conjuntos densos e abertos em $\mathcal{X}$ é densa e aberta em $\mathcal{X}$.

Exercício 22 Todo homeomorfismo é uma isometria?

Exercício 23 Se $x_n \to x$, mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e que toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x.

Exercício 24 Mostre que se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então ela também converge.

Exercício 25 Se $d(x_{n+1},x_n) \leq ac^n$ para algum $c < 1$ e $a > 0$, então $\{x_n\}$ é Cauchy.

Exercício 26 Seja $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico completo e A um subconjunto fechado de $\mathcal{X}$. Mostre que o espaço métrico (A,d) é completo.

Exercício 27 (Teorema da Contração de Banach) Um mapeamento $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é uma *contração* se existe $a \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq a \cdot d(x, y), \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

Suponha que $\mathcal{X}$ é completo. Mostre que toda contração possui um único ponto fixo, isto é, existe um único $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = x$. *Dica: Defina uma sequência* $x_{n+1} = f(x_n)$ *com* $x_1 \in \mathcal{X}$ *arbitrário.*

Exercício 28 Sejam $(\mathcal{X}_1, d_1), \cdots, (\mathcal{X}_n, d_n)$ espaços métricos completos e defina o espaço produto como $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$. Sejam $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ de $\mathcal{X}$. Prove que $\mathcal{X}$ é completo quando a ele são atribuídas as seguintes métricas

(a) $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n)$;

(b) $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$;

(c) $d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2\right)^{1/2}$.

Exercício 29 Mostre que o espaço $\mathcal{X} = C[a, b]$ munido da métrica máximo é completo.

Exercício 30 Sejam $(\mathcal{X}, d_X)$ e $(\mathcal{Y}, d_Y)$ espaços métricos. Uma função $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é uniformemente contínua em $\mathcal{X}$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_X(x_1, x_2) < \delta$ implique que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

Prove que se $(\mathcal{Y}, d_Y)$ é completo e $f : A \to \mathcal{Y}$ é uniformemente contínua em A com $\bar{A} = \mathcal{X}$, então f tem uma única extensão contínua $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e esta extensão g é uniformemente contínua em $\mathcal{X}$.

Exercício 31 (Completando os números racionais) Provamos que todo espaço métrico $(\mathcal{X}, d)$ tem um completamento $(\mathcal{X}^*, d^*)$ e que, além disso, ele é único a menos de uma isometria. Considere o espaço métrico $(\mathbb{Q}, d)$ com $d(x, y) = |x - y|$.

(a) Mostre que $(\mathbb{Q}, d)$ não é completo, isto é, mostre uma sequência de Cauchy não convergente. Sabemos que existe um completamento $(\mathbb{Q}^*, d^*)$. A ideia desse exercício é construí-lo e mostrar que ele satisfaz os axiomas que definem os números reais.

(b) Sejam $s_x = \{x_n\}$ e $s_y = \{y_n\}$ sequências de Cauchy definidas em $\mathbb{Q}$. Defina a relação R de forma que $s_x \, R \, s_y$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Mostre que R é uma relação de equivalência. Denote R por $\sim$.

(c) Defina $\mathbb{R}$ como o conjunto quociente $\mathbb{Q}/\sim$, o conjunto das classes de equivalência de $\mathbb{Q}$, e denote seus elementos por $x = [x_n]$. Mostre que soma e produto de elementos de $\mathbb{R}$ estão bem definidos com

$$x + y := [x_n + y_n] \text{ e } xy := [x_n y_n].$$

e que $\mathbb{R}$ é um corpo com essas operações.

(d) Dizemos que $x = [x_n] > [0]$ se existem $\epsilon \in Q_+$ e $N \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \geq \epsilon$ para todo $n \geq N$. Defina a relação de ordem em $\mathbb{R}$ como $x \geq y$ se $x - y > 0$ ou $x \sim y$. Mostre que ela define uma ordem total sobre $\mathbb{R}$.

(e) Defina $d^*(x, y) = \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n|$, em que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são representantes das suas respectivas classes de equivalência. Mostre que d^* está bem definido e que $(\mathbb{R}, d^*)$ é um espaço métrico. Para isso, basta mostrar que $|x| := [|x_n|]$ está bem definido e que é, de fato, o valor absoluto como conhecemos $|x| = \max\{x, -x\}$.

(f) Note que $\mathbb{Q}$ é isométrico ao conjunto $\mathbb{Q}_0 = \{[a, a, \ldots,] : a \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ e que Q_0 é denso em $\mathbb{R}$.

(g) Mostre que o *axioma da completude* é satisfeito, isto é, que todo conjunto não vazio limitado superiormente tem supremo.

(h) Mostre que $\mathbb{R}$ é completo.

Exercício 32 Seja $(\mathbb{N}, d)$ espaço métrico com $d(x, y) = |x - y|$. Prove que $\{x\}$ é conjunto aberto de $\mathbb{N}$. Prove que esse resultado vale para uma métrica arbitrária ou encontre um contra-exemplo, isto é, uma métrica d e um ponto $x \in \mathbb{N}$ de forma que $\{x\}$ não seja aberto considerando essa métrica.

Exercício 33 Mostre que o teorema da sequência dos conjuntos fechados encaixados deixa de valer se retirarmos a hipótese de que os diâmetros tendem a zero.

Exercício 34 Prove que sequências de Cauchy são limitadas. Conclua que sequências ilimitadas não podem convergir.

Exercício 35 Sejam $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico e $A \subseteq \mathcal{X}$. Mostre que $d(A) = d(\bar{A})$.

Exercício 36 Sejam $(\mathcal{X}, d_X)$ e $(\mathcal{Y}, d_y)$ espaços métricos. Uma função $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é dita *função Lipschitz* se existe $L > 0$ tal que $\forall x, y \in \mathcal{X}$, vale que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y).$$

Seja f função Lipschitz. Mostre que para todo conjunto $A \subseteq \mathcal{X}$ limitado, sua imagem $f(A) \subseteq \mathcal{Y}$ é limitada.

Exercício 37 Considere o espaço l_2 definido no Exercício 4. Defina Π o conjunto dos pontos $x \in l_2$ que satisfazem $|x_n| \leq 2^{-n-1}, n \geq 1$. Prove que Π é totalmente limitado.

Exercício 38 Mostre que $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ é fechado e totalmente limitado em $\mathbb{Q}$, mas não é compacto.

Exercício 39 Sejam A e B subconjuntos compactos de um espaço métrico $(\mathcal{X}, d)$ tais que $A \cap B = \emptyset$. Prove que $d(A, B) > 0$. E se A e B forem subconjuntos fechados, essa afirmação é válida? Encontre um contra-exemplo.

Exercício 40 Em $\mathbb{R}^n$, um conjunto A é limitado se, e somente é, é totalmente limitado. Pode considerar métrica derivada da norma 1, norma 2 ou norma máximo. Futuramente, vamos verificar que elas são equivalentes.

Exercício 41 Uma função contínua $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, com $(\mathcal{X}, d_X)$ e $(\mathcal{Y}, d_Y)$ sendo espaços métricos completos, mapeia conjuntos totalmente limitados de $\mathcal{X}$ a conjuntos totalmente limitados de $\mathcal{Y}$.

Exercício 42 Seja um mapeamento contínuo $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Mostre que vale a generalização do Teorema de Weierstrass, isto é, dado um compacto $K \subseteq \mathcal{X}$, existem pontos $x_0, y_0 \in K$ tais que

$$f(x_0) = \inf_{x \in A} f(x) \quad \text{e} \quad f(y_0) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Exercício 43 Seja A um subconjunto de um espaço métrico $(\mathcal{X}, d)$. Prove que o completamento A^* de A é compacto se, e somente se, A é totalmente limitado.

Exercício 44 Seja $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico compacto. Prove que a isometria $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é função bijetiva.

Exercício 45 Seja $\mathcal{S}$ o espaço das sequências de números reais. Dados dois pontos $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, defina

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Mostre que $(\mathcal{S}, d)$ é espaço métrico separável e completo.

Exercício 46 (Teorema de Dini) Se K é compacto e $(f_n) \subseteq C(K, \mathbb{R})$ é uma sequência crescente, convergindo pontualmente para $f \in C(K, \mathbb{R})$, então f_n converge para f em $C(K, \mathbb{R})$. *Dica: Considere a cobertura de K por bolas $B_\delta(x)$ tal que $f - \epsilon < f_n < f$ para n suficientemente grande.*

Exercício 47 Uma família de funções $F \subseteq C([a, b])$ é *uniformemente limitada* se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para toda $f \in F$ e $x \in [a, b]$. Verifique a seguinte versão do Teorema de Arzelà: $F \subseteq C([a, b])$ é relativamente compacto em $C[a, b]$ se, e somente se, F é uniformemente limitado e equicontínuo.

Exercício 48 Seja $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico. Se $(\mathcal{X}, d)$ é totalmente limitado, então ele é separável. Em contrapartida, se existe uma quantidade não enumerável de bolas disjuntas, então o espaço não é separável.

Exercício 49 Mostre que $C[a, b]$ é separável (usando funções lineares com bicos nos números racionais). Também mostre que $C(\mathbb{R}_+)$ não é separável.

Exercício 50 Nesse exercício, provaremos o Teorema de Cauchy-Peano de existência de soluções de equações diferenciais ordinárias. Considere a EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $\Omega = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}_b(x_0)$, para $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a métrica $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\}$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Para constantes $c, L \in \mathbb{R}$, defina o conjunto

$$\mathcal{A} := \{\gamma : [t_0, t_0 + c] \to \mathbb{R}^n : \|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq L|t - s|, \ \forall t, s \in [t_0, t_0 + c]\}.$$

Dados a, b, que escolha de constantes c, L nos garante que uma solução da EDO está em $\mathcal{A}$ e é tal que $(t, \gamma(t)) \in \Omega$?

(b) Defina o funcional sobre $\mathcal{A}$

$$F(\gamma) = \max_{t \in [t_0, t_0 + c]} \left\| \gamma(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s)) ds \right\|.$$

Prove que F assume um mínimo em $\mathcal{A}$.

(c) Defina a sequências de funções

$$\gamma_n(t) := \begin{cases} x_0, & \text{se } t \in [t_0, t_0 + c/n] \\ x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t - c/n} f(s, \gamma_n(s))\, ds, & \text{se } t \in (t_0 + c/n, t_0 + c] \end{cases}$$

Verifique que $F(\gamma_n) \to 0$ e conclua que a EDO admite ao menos uma solução $\mathcal{C}^1$.