Análise Funcional 2022
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Maria Soledad Aronna
Monitor Lucas Machado Moschen 25 de agosto de 2022

Lista Espaços Normados

Para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denotamos por A^* sua transposta conjugada.

Exercício 1 Prove os exercícios dados em sala de aula.

Exercício 2 Seja $C^2[a,b]$ o espaço das funções contínuas definidas em $[a,b]$ e defina a função $N : C^2[a,b] \to \mathbb{R}_+$ de forma que

$$N(f) = \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Prove que $(C^2[a,b], N)$ é um espaço normado, mas não é espaço de Banach.

Demonstração. É fácil verificar que $C^2[a,b]$ é um espaço vetorial com as operações de soma de funções e produto por escalar. Agora, devemos mostrar que $N(f)$ define uma norma em $C^2[a,b]$. Como f é contínua, então ela é integrável. Além disso, dado que $f^2(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$, temos que a raiz é bem definida, implicando que $N(\cdot)$ é uma função bem definida. Pela definição de raiz quadrada, $N(f) \geq 0$ para toda função f. Suponha que $N(f) = 0$, então $N(f)^2 = 0$. Suponha que f é não nula em um ponto $x \in [a,b]$. Com isso, pela continuidade, $f^2(x) > 0$ em $B_r(x)$ para algum $r > 0$. Então,

$$N(f) \geq \int_{x-r}^{x+r} f^2(t)\,dt > 0,$$

o que é um absurdo, implicando que $f \equiv 0$ em $[a,b]$. Tome $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim,

$$N(\alpha f)^2 = \int_a^b \alpha^2 f^2(t)\,dt = \alpha^2 N(f)^2 \implies N(\alpha f) = |\alpha| N(f).$$

Por fim, tome $f, g \in C^2[a,b]$. Então,

$$N(f+g)^2 = \int_a^b (f+g)^2(t)\,dt = N(f)^2 + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt + N(g)^2.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, o termo do meio é limitado por $2N(f)N(g)$, o que implica que, tirando a raiz de ambos os lados,

$$N(f+g) \leq N(f) + N(g),$$

o que estabelece que $N(\cdot)$ define uma norma.

Falta verificar que esse espaço não define um espaço de Banach. Para isso, precisamos mostrar que nem toda sequência de Cauchy é convergente. Para isso, defina

$$f_n(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n.$$

que é infinitamente diferenciável. Note que

$$\begin{aligned}
N(f_n - f_{n+k})^2 &= \int_a^b (f_n(x) - f_{n+k}(x))^2\, dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2n} \left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k\right)^2 dx \\
&= (b-a)\int_0^1 y^{2n}(1-y^k)^2\, dy \\
&= (b-a)\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+k+1} + \frac{1}{2n+2k+1}\right) \\
&\leq (b-a)\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+k+1}\right)
\end{aligned}$$

o que implica que para n suficientemente grande, essa norma converge para 0. Com isso, temos uma sequência de Cauchy. Todavia, essa função converge pontualmente para a função $f(x) = 0$ se $x < b$ e $f(b) = 1$, que não é contínua. Logo, o espaço não pode ser de Banach. □

Exercício 3 Para cada matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, defina

$$\|A\|_{\text{HS}} = \sqrt{\text{tr}(AA^*)}.$$

Prove que $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ é uma norma e que ela satisfaz, para todo $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$\|AB\|_{\text{HS}} \leq \|A\|_{\text{HS}}\|B\|_{\text{HS}}.$$

Demonstração. Vamos verificar as condições de norma. Note que

$$\|A\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (AA^*)_{ii}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}A^*_{ji}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2}.$$

Logo, é claro que $\|A\|_{\text{HS}} \geq 0$ e que $\|A\|_{\text{HS}} = 0$ implica que $A = 0$. Além do mais, para $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\|\alpha A\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |\alpha A_{ij}|^2 = |\alpha|^2\|A\|_{\text{HS}},$$

que mantém o produto por escalar. Por fim, denote A_i para a linha i de A. Assim,

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_{\text{HS}}^2 &= \sum_{i=1}^n \|A_i + B_i\|_2^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \|A_i\|_2^2 + 2\|A_i\|_2\|B_i\|_2 + \|B_i\|_2^2 \\
&\leq \|A\|_{\text{HS}}^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n \|A_i\|_2^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \|B_i\|_2^2} + \|B\|_{\text{HS}}^2 \\
&= \|A\|_{\text{HS}}^2 + 2\|A\|_{\text{HS}}\|B\|_{\text{HS}} + \|B\|_{\text{HS}}^2 = \left(\|A\|_{\text{HS}}^2 + \|B\|_{\text{HS}}^2\right)^2,
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração de que essa é uma norma. Note que aplicamos Cauchy-Schwarz na passagem da segunda para a terceira linha. Por fim, vamos provar que essa é uma *norma matricial*. Denote b_j para a coluna j da matriz B. Assim,

$$\begin{aligned}\|AB\|_{\mathrm{HS}}^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\langle A_i, b_j\rangle|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|A_i\|_2^2\|b_j\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|A_i\|_2^2 \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|_2^2 = \|A\|_{\mathrm{HS}}\|B\|_{\mathrm{HS}}.\end{aligned}$$

□

Exercício 4 Defina o espaço l^∞ como o espaço das sequências de números reais limitadas, isto é, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty$.

(a) Prove que $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, com $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ para $x \in l^\infty$, é um espaço normado completo.

(b) Prove que esse espaço não é separável, isto é, ele não contém um subconjunto enumerável denso.

(c) Seja c o espaço de todas as sequências convergentes. Prove que $c \subseteq l^\infty$ e que c é fechado. Conclua que $(c, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço normado completo.

Demonstração. Seguem:

(a) As condições de norma são trivialmente satisfeitas usando a sub-linearidade do supremo. A completude desse espaço vem do fato de que o espaço métrico induzido é completo. Para demonstrar isso, basta observar que para uma sequência de Cauchy de sequências, cada índice define uma sequência de Cauchy nos reais, logo convergente. A convergência em l^∞ vem do fato de que estamos sempre tomando o supremo das distâncias dos índices.

(b) Note que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq l^\infty$ é não enumerável e para cada $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, temos que $B_{1/2}(x) \cap \{0,1\}^{\mathbb{N}} = x$. Com isso, temos uma quantidade não enumerável de bolas disjuntas contidas em l^∞. Se houvesse um subconjunto denso, esperaríamos ter infinitos pontos dentro de cada uma dessas bolas, o que não é possível se o conjunto for enumerável.

(c) É um exercício de análise real ver que $c \subseteq l^\infty$. Agora, considere uma sequência $\{x^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq c$ que seja convergente para x^*. Queremos mostrar que $x^* \in c$. Note que para todo $\epsilon > 0$, para m suficientemente grande, temos que $\|x^m - x^*\| < \epsilon$, o que implica que $|x_m^m - x_m^*| < \epsilon$. Defina $x^{**} = \lim x_m^m$. Esse valor é bem definido, pois $\{x_m^m\}$ é Cauchy nos reais e, portanto, convergente, dada a seguinte desigualdade:

$$|x_n^n - x_m^m| \leq |x_n^n - x_j^n| + |x_j^n - x_j^m| - |x_j^m - x_m^m| \leq |x_n^n - x_j^n| + \|x^n - x^m\| + |x_j^m - x_m^m|$$

e $\{x^m\}$ é Cauchy, pois é convergente. Com isso, é fácil ver que $\lim x_m^* = x^{**}$.

□

Exercício 5 Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo não vazio. Seja $\mathcal{L}(I)$ o espaço das funções de Lipschitz definidas em I e defina

$$k(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Prove que a função k é bem definida.

(a) Tome $a \in I$ e defina a função

$$N_a(f) = |f(a)| + k(f).$$

Prove que N_a é uma norma em $\mathcal{L}(I)$ e que para $a, b \in I$, N_a e N_b são equivalentes.

(b) Mostre que $\mathcal{L}(I)$ é completo sob essa norma.

(c) Mostre que o subespaço das contrações, $k(f) < 1$, é um conjunto aberto de $\mathcal{L}(I)$.

(d) Para I compacto, mostre que o conjunto das funções continuamente diferenciáveis definidas em I é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(I)$ e que $k(f) = \|f'\|_\infty$ para f nesse subespaço.

Demonstração. Segue:

(a) É claro que $k(\cdot)$ está bem definido, pois f é Lipschitz. Vamos verificar as condições que definem $N_a(\cdot)$ como norma:

(i) $N_a(f) \geq 0$ trivialmente. Suponha que $N_a(f) = 0$. Como $k(f) \geq 0$ e $|f(a)| \geq 0$, temos que $k(f) = 0$, que implica que $f(x) = f(y)$ para todo x, y. Além disso, $f(a) = 0$, que implica que f é identicamente nula.

(ii) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $N_a(\alpha f) = |\alpha||f(a)| + k(\alpha f) = |\alpha| N_a(f)$, visto que supremo preserva produto por constante.

(iii) Para $f, g \in \mathcal{L}(I)$, vale que

$$N_a(f+g) = |(f+g)(a)| + \sup_{x \neq y} \frac{|(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))|}{|x - y|} \leq N_a(f) + N_a(g),$$

dada a sub-linearidade do supremo.

Queremos mostrar que N_a e N_b são equivalentes. Suponha, sem perda de generalidade, que $b > a$ e defina $c = b - a + 1$. Assim,

$$k(f)(c-1) = k(f)|b - a| \geq |f(b) - f(a)| \geq |f(b)| - |f(a)| \geq |f(b)| - c|f(a)|,$$

o que implica que $cN_a(f) \geq N_b(f)$. No mesmo sentido,

$$k(f)(c-1) = k(f)|a - b| \geq |f(a) - f(b)| \geq |f(a)| - |f(b)| \geq |f(a)| - c|f(b)|,$$

que implica que $cN_b(f) \geq N_a(f)$, isto é,

$$c^{-1} N_a(f) \leq N_b(f) \leq c N_a(f), \forall f \in \mathcal{L}(I).$$

Isso mostra que as normas são equivalentes.

(b) Tomo qualquer ponto $a \in I$, dado que as normas são equivalentes. Seja $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(I)$ sequência de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, existe m, n suficientemente grandes tal que $|f_n(a) - f_m(a)| < \epsilon$ e $k(f_n - f_m) < \epsilon$. Como $k(f_n) - k(f_m) \leq k(f_n - f_m)$ pela sub-linearidade do supremo, temos que $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{k(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy e, portanto, convergentes. Ademais vale que para todo $x \neq a$,

$$\frac{|(f_m(x) - f_m(a)) - (f_n(x) - f_n(a))|}{|x-a|} < \epsilon,$$

o que implica que

$$\left\{\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

é sequência Cauchy para todo $x \neq a$ e, então $\{f_n(x)\}$ é Cauchy, logo convergente, para todo $x \in I$. Defina $f(x) = \lim f_n(x)$ para $x \in I$ e $k^* = \lim k(f_n)$.

Observe que para todo $x \neq y$,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|} \leq \lim k(f_n) = k^*.$$

e, então, f é Lipschitz. Falta mostrar que $f_n \to f$ sob $N_a(\cdot)$, isto é, que $k(f_n - f) \to 0$. Para dado $\epsilon > 0$, seja N tal que $n, m \geq N$ implica $k(f_n - f_m) < \epsilon/3$. Além disso, para cada $x, y \in I$, existe $n(x,y) \geq N$ tal que $|f_{n(x,y)}(x) - f(x)| < \epsilon|x-y|/3$ e $|f_{n(x,y)}(y) - f(y)| < \epsilon|x-y|/3$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{|f_n(x) - f(x) - f_n(y) + f(y)|}{|x-y|} &\leq \frac{|(f_n(x) - f_{n(x,y)}(x)) - (f_n(y) - f_{n(x,y)}(y))|}{|x-y|} \\
&+ \frac{|f_{n(x,y)}(x) - f(x)|}{|x-y|} + \frac{|f(y) - f_{n(x,y)}(y)|}{|x-y|} \\
&< k(f_n - f_{n(x,y)}) + 2\epsilon/3 < \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ não depende de x, y, vale que $k(f_n - f) < \epsilon$.

(c) Seja $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(I)$ convergente para f com $k(f_n) \geq 1$. Note que

$$k(f_n - f) \geq |k(f_n) - k(f)| \geq 0,$$

que implica que $k(f_n) \to k(f)$. Com isso isso, $k(f) \geq 1$ e, portanto o complementar do espaço das contrações é fechado, o que encerra a demonstração.

(d) Para cada função continuamente diferenciável em I, pelo Teorema do Valor Médio, para cada $x, y \in I$, existe $c \in [x, y]$ tal que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y|.$$

Como f' é função contínua, defina $M_f = \max_{c\in I} |f'(c)| = \|f'\|_\infty$, que está bem definido pelo Teorema de Weierstrass. Assim, $f \in \mathcal{L}(I)$, pois $|f(x) - f(y)| \leq M_f|x-y|$. Como soma de funções diferenciáveis é diferenciável e produto por escalar também, elas definem um subespaço de $\mathcal{L}(I)$. Seja c^* o ponto tal que $M_f = |f'(c^*)|$. Temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(c^* + h) - f(c^*)|}{h} = f'(c^*),$$

o que mostra que $k(f) \geq M_f$ e, então, $k(f) = M_f$. Falta provar que esse subespaço é fechado. Seja $\{f_m\}$ sequência convergente para $f \in \mathcal{L}(I)$. Tome $x \in I$ e $x_n \to x$. Assim,

$$\frac{|f_m(x_n) - f_m(x)|}{|x_n - x|} \overset{n\to\infty}{\to} f'_m(x).$$

e $k(f_m) \overset{m\to\infty}{\to} k(f)$. Note que para todo $\epsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq M$ implica que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|f_m(x_n) - f(x_n) - (f_m(x) - f(x))|}{|x_n - x|} < \epsilon,$$

isto é,

$$\left| \frac{|f(x_n) - f(x)|}{|x_n - x|} - (f'_m(x) + \delta_n) \right| < \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e δ_n arbitrariamente pequeno. Com isso, f é diferenciável e, portanto, esse subespaço é fechado.

□

Exercício 6 Mostre que um espaço de Banach de dimensão infinita não pode ter uma base enumerável. *Dica: Use o Teorema da categoria de Baire.*

Demonstração. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Pelo Teorema de Baire, X não pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos densos em nenhum lugar, em que A é denso em lugar algum se $\bar{A}^c$ é denso em X. Suponha que X tenha uma base enumerável Λ, que não é finita, pois X tem dimensão infinita. Para todo $x \in X$,

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{\alpha_i},$$

para $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ e $x_{\alpha_i} \in \Lambda$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração de Λ e $X_n = [x_1, \ldots, x_n]$. Assim, fica claro que

$$X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Veja que X_n é um subespaço de dimensão finita e, portanto, X_n é fechado, isto é, $X_n = \overline{X_n}$. Suponha que $X_n^\circ \neq \emptyset$ e tome $x \in X_n^\circ$, que implica que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq X_n$. É claro que $y = x + m^{-1}x_{n+1} \notin X_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\|x + m^{-1}x_{n+1} - x\| = m^{-1}\|x_{n+1}\| < r,$$

tomando $m > \|x_{n+1}\|/r$, fazendo com que $y \in B_r(x)$, um absurdo. Isso implica que tal base não pode existir. □

Exercício 7 Seja X um espaço normado. Uma condição suficiente e necessária para que X tenha dimensão finita é que todo conjunto fechado e limitado em X seja compacto.

Demonstração. Suponha que X tenha dimensão finita e seja $x_1, \ldots, x_n$ uma base. Para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, defina $T\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Vamos mostrar que T é um isomorfismo:

(i) T é bijetivo pela definição de base e unicidade dos coeficientes.

(ii) T é linear pela linearidade da soma e do produto por escalar.

(iii) Seja $\alpha^n \to \alpha$ em $\mathbb{R}^n$. Assim,

$$\|T\alpha^n - T\alpha\| = \|T(\alpha^n - \alpha)\| \to 0,$$

que implica que T é contínuo.

Com isso, X é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Defina a norma em $\mathbb{R}^n$, $\|v\|_T = \|T(v)\|$, que é equivalente a norma 2, pois todas as normas são equivalente nesse espaço. Seja A conjunto fechado e limitado em X. Pela continuidade de T, temos que $T^{-1}(A)$ é fechado. Além disso, para $v = T^{-1}(y) \in T^{-1}(A)$, $\|v\|_T = \|T(T^{-1}(y))\| = \|y\|$, que é limitado. Então $T^{-1}(A)$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$, portanto compacto. Como T é contínua, $T(T^{-1}(A)) = A$ é compacto, como gostaríamos de mostrar.

Seja X um conjunto de dimensão infinita. Tome $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| = 1$ e defina $M_0 = [x_0]$. Como M_0 tem dimensão finita, então M_0 é fechado, além de ser próprio. Pelo Teorema de Riesz, existe $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$ e $\|x - x_1\| \geq 1/2$ para todo $x \in M_0$. Defina $M_n = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Pelo Teorema de Riesz, existe x_{n+1} tal que $\|x_{n+1}\| = 1$ e $\|x - x_{n+1}\| \geq 1/2$ para todo $x \in M_n$. A sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é fechada por vacuidade (nenhuma subsequência é convergente) e limitada, por definição e não é de Cauchy, visto que $\|x_i - x_j\| \geq 1/2$ para todo $i \neq j$. COmo não há subsequências convergentes, esse conjunto não pode ser compacto. $\square$

Exercício 8 Dê exemplo de um espaço de dimensão infinita e de duas normas definidas nele que não sejam equivalentes.

Solução. Dado em aula.

Exercício 9 Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado de dimensão finita. Todo subespaço de V é fechado com respeito a $\|\cdot\|$.

Demonstração. Corolário 2 [1, p. 125] $\square$

Exercício 10 Defina $L^\infty(A)$ como o espaço das funções μ-mensuráveis limitadas[1] $f : A \to \mathbb{C}$ com a norma supremo $\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$, em que $\mu(E^c) = 0$, isto é, $\|f\|_\infty$ é o menor número c tal que $|f(x)| \leq c$ para μ-quase todo $x \in A$.

(a) Mostre que $L^\infty(A)$ é um espaço de Banach.

(b) Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$ sequência de funções convergente para f em $L^\infty(\mathbb{R})$. Mostre que

(i) se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são contínuas, então f é contínua.

[1] Mais precisamente, o espaço das classes de equivalência dessas funções, em que duas funções são equivalentes se elas são diferentes apenas em um conjunto de medida nula.

(ii) se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são integráveis, então f é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

Solução. Ver a Proposição 9.18 de [2].

Exercício 11 Um subconjunto K de um espaço normado X é totalmente limitado se, e somente se, K é limitado e para todo $\epsilon > 0$, existe um subespaço $Y \subseteq X$ de dimensão finita tal que

$$\sup_{x\in K} d(x,Y) \leq \epsilon.$$

Solução. Proposição 8.23 [2, p. 136].

Exercício 12 Seja X um espaço normado e p um funcional sublinear em X. Prove que para todo $x_0 \in X$, existe um funcional linear F em X tal que $F(x_0) = p(x_0)$ e $F(x) \leq p(x), \forall x \in X$.

Exercício 13 Seja Y subespaço próprio fechado do espaço de Banach X e tome $x \in X/Y$. Mostre que existe um funcional linear limitado ϕ com $\|\phi\| \leq 1$, $\phi(Y) = \{0\}$ e $\phi(x_0) = d(x_0, Y)$.

Exercício 14 Se $x \in X$ e $x \notin B_r(0)$, existe um *hiperplano* $\phi^{-1}\alpha$ que os separa, isto é, existe um funcional linear contínuo ϕ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\forall y \in B_r(0)$ e

$$|\phi y| < \alpha < |\phi x|.$$

Solução. Ver [2, Proposição 11.20]

Exercício 15 Seja I um intervalo limitado por $a < b$. Denote $l(I) = b - a$, o comprimento de I. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}$, defina

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_k, I_k = (a_k, b_k)\right\}.$$

Considere a σ-álgebra $\mathcal{X}$ definida pelos conjuntos E que satisfazem o critério de Carathéodory, isto é, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

A medida de Lebesgue é dada por $\lambda : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda(E) = \lambda(E^*)$. Se $E \notin \mathcal{X}$, dizemos que E é não Lebesgue-mensurável. Com isso, nasce o seguinte problema: para cada conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ limitado, queremos atribuir um valor $\mu(E)$ que satisfaça:

(i) $\mu([0,1]) = 1$.

[1] Sim, esses conjuntos existem: `https://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set`

(ii) Se A e B são isométricos, então $\mu(A) = \mu(B)$.

(iii) Sejam $E_1, \ldots, E_n$ conjuntos disjuntos. então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Queremos provar que μ existe. Restrinja os conjuntos E para aqueles entre $[0,1)$. *Obs.: Se $n = \infty$, é possível mostrar que μ não existe.*

(a) Defina X como o espaço de funções limitadas periódicas com período 1 e, para cada $f \in X$,

$$p(x) = \inf_{\alpha_i} \left\{ \sup_{0 \le t \le 1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t + \alpha_i) \right\}.$$

Mostre que p é funcional sublinear em X.

(b) Prove que existe um funcional linear F em X com $F(f) = p(f)$ e $F(x) \le p(x), \forall x \in X$.

(c) Prove que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, $F(f(t+t_0)) = F(f(t))$. *Dica: Defina $y(t) = f(t+t_0) - f(t)$ e prove que $p(y) \le 0$ e $-p(-y) \ge 0$.*

(d) Mostre que $F(f) \ge 0$ se f é função não negativa.

(e) Mostre que $F(i_1) = 1$, em que $i_1(t) = 1$ para todo t.

(f) Defina

$$\int f(t) = \frac{1}{2}[F(f) + F(\hat{f})],$$

em que $\hat{f} = f(1-t)$. Mostre que esse operador é linear, satisfaz $\int f(t+t_0) = \int f(t)$, que $\int i_1(t) = 1$ e que $\int f(t) \ge 0$ se f é não negativa. Além disso mostre que

$$\int f(1-t) = \int f(t), \forall f \in X.$$

Com isso, $\int f(t)$ é uma **integral de Banach**.

(g) Seja k_E a função característica de E e defina

$$\mu(E) = \int k_E(t).$$

Mostre que μ satisfaz as propriedades da medida que gostaríamos.

Solução. Ver [1, Apêndice 9].

Referências

[1] George Bachman and Lawrence Narici. *Functional analysis.* Courier Corporation, 2000.

[2] Joseph Muscat. *Functional analysis: an introduction to metric spaces, Hilbert spaces, and Banach algebras.* Springer, 2014.