Monitoria 20/08/2021

Questão 5 - Lista 1

- Temos que a solução geral é $x_n = A \cdot 3^n + B 7^{-n}$, em que

$$A = (7x_1 - x_0)/20$$
$$B = f(x_0, x_1)$$

De fato, se plotamos x_n para $x_0 = 1$, $x_1 = 1/7$, obtemos o gráfico

Mas por que a solução diverge usando a iteração?

- Apesar do computador não armazenar o número 1/7 exatamente,

$$fl(7 \cdot (1/7)) = fl(1),$$

isto é, $fl(A) = fl(0)$, o que é bom!

- Mas o que acontece com

$$x_n = \frac{22}{7} x_{n-1} - \frac{3}{7} x_{n-2} \;?$$

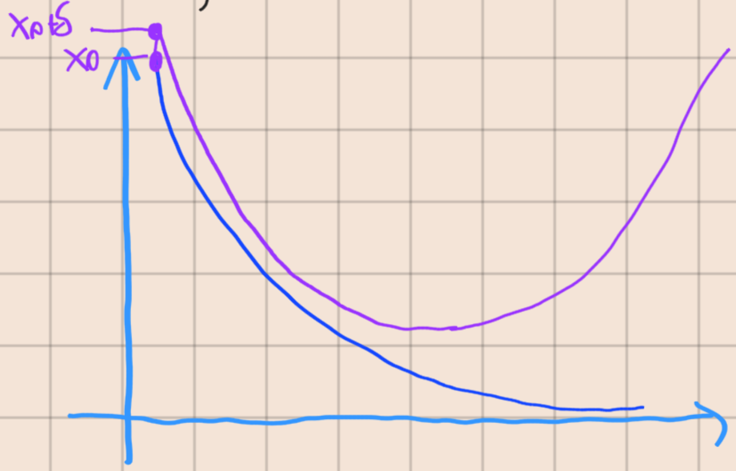
Estabilidade

- Suponha que $x_1 = 1/7 + \delta$, em que δ é um número pequeno. O que acontece com x_n?

$$A = \frac{7(1/7+\delta) - 1}{20} \neq 0$$

e $3^n \to +\infty \Rightarrow x_n \to +\infty$!

Como vimos, no nosso caso



Na prática de fato $A = 0$. Mas e se o erro ocorrer com $m > 0$, isto é,

$$\hat{x}_m = fl(x_m) = x_m + \delta \ ?$$

O erro vai a cada iteração se acumulando mais e mais. Se escrevemos

$$x_n = C\,3^n + D\,(1/7)^n,$$

$$\begin{cases} C + D = 1 \\ C\,3^m + D\,(1/7)^m = \overset{=(\frac{1}{7})^m}{x_m} + \delta \end{cases},$$

$$\Rightarrow C\,21^m + \overset{=(\cancel{1}-C)}{D} = \cancel{1} + 7^m\delta$$

$$\Rightarrow C = \frac{7^m\delta}{21^m - 1} \neq 0 \Leftrightarrow \delta \neq 0,$$

isto é, se errarmos em algum momento m, esse erro vai ainda se propagar!

- Olhe o que acontece com

$$x_1, x_2, \ldots, x_{20}$$

Numericamente, vemos um erro claro:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^n < 0,$$

um absurdo!

$$x_{n+1} = a\, x_n + 0\, x_{n-1} + b$$

$$= a^n x_i + \left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right) b$$