PROVA A1. Análise Numérica. FGV EMAp 2020

Observaçôes:

- Pode fazer a prova no tablet ou computador, ou a lápis/caneta.
- Ao finalizar a prova deve enviar as soluções em pdf, em arquivo único.
- A qualidade do arquivo enviado deve ser boa suficiente para que a leitura seja fácil.
- Justifique cuidadosamente todas as respostas. Em cada questão, são as justificativas que contam pontos.

1. (a) Seja $k \in \mathbb{N}$, determine quantos números reais do intevalo $[2^k \quad 2^{k+1}]$ podem ser armazenados exatamente no computador (considerando precisão dupla). Justifique.

   (b) O seguinte algoritmo calcula a norma euclideana de um vetor $n-$dimensional $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

   Entrada: x, n
   $s = 0$
   for $i = 1 : n$
   $s = s + x_i^2$
   end
   $s = s^{1/2}$
   Saída: 'norma'$= s$

   i. Suponha que um programa computacional é feito com base nesse algoritmo e seja norma(x, n) a função que devolve o valor da norma euclideana de un vetor x de dimensão n, usando esse programa computacional. Seja $x_1^* = \left(2^{600}, 1, 1, 1, 1\right)$ e $x_2^* = \left(2^{600}, -1, -1, -1, -1\right)$. Qual é o valor de $d =$norma$(x_1^*, 5)-$norma$(x_2^*, 5)$? Justifique.

   ii. Modifique o algoritmo acima de tal forma que o programa computacional, feito com base nesse novo algoritmo, calcule corretamente d.

2. Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1+\cos(2\theta) & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   e onde o parâmetro $\theta \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que é possível rearranjar as linhas e colunas de A de tal modo que o método de Seidel aplicado ao sistema obtido seja convergente independentemente do valor de θ.

   (b) Obtenha as primeiras 2 iteradas do método de Seidel, para o sistema obtido em (a), começando em $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

   (c) Quantas iterações (independentemente do valor de θ) são necessárias para determinar a solução do sistema, com uma precisão de 0.001?. Justifique.

3. Considere as curvas $y = x^2$ e $y = \sin^2(x+1)$, as quais tem interseção no ponto (r, r^2) com $r \in I = [0, 1]$. Pretende-se calcular essa interseção das curvas através da aplicação do método iterativo do ponto fixo com uma função iteradora da forma

$$g(x) = x - \lambda\left(x - \sin(x+1)\right); \quad \lambda \neq 0$$

(a) Verifique que r é, de facto, ponto fixo da função g no intervalo I.

(b) Faça $\lambda = \frac{1}{2}$ e demonstre que o método iterativo do ponto fixo associado a g converge para r, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in I$.

(c) Determine o número de iterações necessárias para se obter uma aproximação a r com um erro absoluto não superior a 10^{-6}.

(d) Explique como pode ser utilizado o método de Newton para determinar a interseção das curvas (Não precisa provar que Newton funciona, é só explicar como pode ser usado)