PROVA A1. Análise Numérica. FGV EMAp 2021

Observaçôes:

- A prova pode feita no tablet, computador, a lápis ou caneta.
- Ao finalizar a prova deve enviar via o eclass, as soluções em pdf, em um único arquivo.
- A qualidade do arquivo enviado deve ser boa o suficiente para que o documento esteja legível e a leitura seja fácil.
- Justifique cuidadosamente todas as respostas. Em cada questão, são as justificativas que contam pontos.

1. (**4 pontos**) Seja S o conjunto formado pelos números reais que tem uma representação exata no computador (considere precisão dupla, i.e 64 bits) e cuja representação em ponto flutuante tem exatamente um bit "1".

   (a) Determine o maior e o menor número real positivo contido em S.

   (b) Determine um número real x tal que $x \notin S$, mas $fl(x) \in S$.

2. (**6 pontos**) Considere o sistema de equações lineares de $n \times n$, cuja j-ésima equação ($j = 1, \ldots, n-1$) é

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^{j-k}} x_k + \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{2^k} x_k = \frac{1}{j}$$

   e cuja n-ésima equação é

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} x_k = \frac{1}{n}$$

   (a) O método de Jacobi aplicado a esse sistema é convergente $\forall n \in \mathbb{N}$? Justifique bem sua resposta.

   (b) O método de Gauss-Seidel aplicado a esse sistema é convergente $\forall n \in \mathbb{N}$? Justifique bem sua resposta.

   (c) Demonstre que para qualquer norma induzida, o método iterativo $x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + d$ satisfaz

$$\left\| x^{(m+1)} - x^{(m)} \right\| \leq \|C\| \left\| x^{(m)} - x^{(m-1)} \right\|, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

   (d) Determine m, em função de n, de modo que após m iterações do método de Jacobi, se obtenha uma aproximação a solução do sistema com uma precisão de 10^{-5}. Justifique.