Essa é uma prova de 2020 que pode conter alguns erros. Podem perguntar :)

1

a) Seja bin(K) a representação binária de K. Com o viés, considere bin(K + 1023).

(1) Temos que se $K+1023 > 2046$, o número é representado como infinito, isto é, nenhum número real pode ser armazenado com precisão nesse caso.

(2) Se $K = 1023$, não podemos representar o número 2^{K+1}. Desta maneira existem 2^{52} números que podem ser representados, variando os 52 valores binários da mantissa.

(3) Se $K < 1023 \Rightarrow K+1 \leq 1023$ e, então podemos representar 2^{K+1}. Logo existem $2^{52}+1$ números armazenados exatamente.

Resumo

(1) Nenhum

(2) 2^{52}

(3) $2^{52}+1$

b) i) O valor será Not a Number (NaN), porque a operação $s = s + x_{11}^2 = (2^{600})^2 = 2^{1200}$, que é representado na máquina como infinito, como vimos em (a)(1). E $\inf - \inf = NaN$.

ii) $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$$= 2^{300} \sqrt{\left(\frac{x_1}{2^{300}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{2^{300}}\right)^2}$$

Logo, computamos o algoritmo

```
norma(x, n, λ)
    s = 0
    for i = 1:n
        s = s + (xi/λ)^2
    s = s^(1/2)
    s = λ · s^(1/2)
    retorna s
```

Nesse caso:

$$d = \text{norma}(x_1^*, 5, 2^{300}) - \text{norma}(x_2^*, 5, 2^{300}).$$

Teremos $s = \lambda\sqrt{2^2 + 2^{-600} + 2^{-600} + 2^{-600} + 2^{-600}}$ para os dois casos. Veja que todos os expoentes estão entre -1022 e 1023, portanto são alocados com precisão. Neste caso:

$$d = 0.$$

2

a) Considere o sistema equivalente:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1+\cos(2\theta) & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Rearrando as colunas para $[a_2\ a_3\ a_1]$. Para mostrar que essa matriz é diagonalmente dominante (estritamente), basta ver que:

(i) $4 > 0 + 3$

(ii) $4 > 0 + 1$

(iii) $3 > 2 \geq 1 + \cos(2\theta) + 0$,

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, dado que $|\cos(2\theta)| \leq 1$.

Concluo que por essa propriedade, o método de Seidel é convergente independente de θ.

b) Seja $x^{(0)} = (0, 0, 0)$

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(n)} \right)$$

Assim:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(0 - 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 0$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(2 - 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = \frac{1}{2}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{3}(1 - (1 + \cos(2\theta)) \cdot 0 + 0 \cdot 1/2) = \frac{1}{3}$$

$$x^{(1)} = (0, 1/2, 1/3)$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(0 - 0\cdot 1/2 + 3\cdot 1/3\right) = \frac{1}{4}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{4}\left(2 - 0\cdot 1/4 + 1\cdot 1/3\right) = \frac{7}{12}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{3}\left(1 - (1+\overbrace{\cos(2\theta)}^{\cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)})\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{7}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\cos^2\theta}{2}\right) = \frac{2-\cos^2\theta}{6}$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{2-\cos^2\theta}{6}\right)$$

(c) $C = -(D+L)^{-1}U$ no método de Seidel.

Provamos que $\|x^* - x^{(n+1)}\| \le \frac{\|C\|^n}{1-\|C\|}\,\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

$$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1+\cos(2\theta) & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ \frac{-1-\cos 2\theta}{12} & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$C = -\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ \frac{-1+\cos 2\theta}{12} & 0 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & \frac{1+\cos 2\theta}{4} \end{bmatrix}$$

$\|C\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |c_{ij}| = \frac{3}{4}$, pois $1+\cos 2\theta \le 3$.

$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \|x^{(1)}\|_\infty = 1/2$. Portanto, queremos que

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{1/\cancel{4}^{\,2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \le 0.001$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{\log(2\cdot 10^{-3})}{\log(3/4)} = \frac{3\log 2}{\log 4 - \log 3}$$

(3) $g(x) = x - \lambda(x - \sin(x+1)), \lambda \neq 0$

a) A interseção ocorre quando
$$r^2 = \sin^2(r+1),$$
isto é, $r = \pm \sin(r+1)$. De fato, isso já mostra que $|r| \leq 1$. Portanto:
$$0 \leq r+1 \leq 2 < \pi$$
isto é, $\sin(r+1) \geq 0$, portanto, deve haver uma interseção quando $r = \sin(r+1)$ e, nesse caso, $0 \leq r \leq 1$.

Além disso,
$$g(r) = r - \lambda(r - \sin(r+1))$$
$$= r - \lambda \cdot 0$$
$$= r, \text{ em } [0,1].$$
Portanto r é ponto fixo de g em I.

b) (1) Primeiro vou mostrar que $g: I \to I$, isto é, $g(I) \subset I$.
$$g(x) = x - 1/2\, x + 1/2 \sin(x+1) = 1/2\,(x + \sin(x+1))$$
Como provamos em (a), se $x \in I$, $\sin(x+1) \geq 0$, portanto $g(x) \geq 0$, dado $x \geq 0$ também.

Além disso $\sin(x+1) \leq 1$ e $x \leq 1$, portanto
$$g(x) \leq 1/2(1+1) \leq 1$$
Concluo que $g(I) \subseteq I$.

(2) $g'(x) = 1 - 1/2(1 - \cos(x+1)) = 1/2(1 + \cos(x+1))$

Se $x \in I \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$. Sabemos que $\cos(x+1)$ reduz o seu valor nesse intervalo. Portanto:

$$|g'(x)| = 1/2\,|1 + \cos(x+1)|$$
$$\leq 1/2 + 1/2\,|\cos(x+1)|$$
$$\leq 1/2 + 1/2 \max\{|\cos(2)|, |\cos(1)|\}$$
$$< 1,$$

dado que $0 < 1,2 < \pi \Rightarrow |\cos(1)| \neq 1$ e $|\cos(2)| \neq 1$.

Desta forma, usando TVM

$$|g(y) - g(x)| = |g'(c)|\,|y-x|$$
$$\leq 1/2(1 + \cos(1))\,|y-x|$$

g é $(1/2(1+\cos(1)))$- Lipschitz.

Concluímos, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que g possui um único ponto fixo em $[0,1]$ que pode ser obtido, a partir de qualquer $x^{(0)} \in I$,

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$$
$$\lim x^{(n)} = r$$

Obs.: $|\cos(1)| \geq |\cos(2)|$, pois $\frac{\pi}{2} - 1 \geq 2 - \frac{\pi}{2}$.

c) Sabemos que:

$$|r - x^{(n+1)}| \leq \frac{K^n}{1-K}\,|x^{(1)} - x^{(0)}|$$

Logo, queremos que $K^n < \frac{1-K}{|x^{(1)} - x^{(0)}|} \cdot 10^{-6}$

E $n > \frac{1}{\log K} \log\left(\frac{1-K}{|x^{(1)} - x^{(0)}|} \cdot 10^{-6}\right)$

Tomando $x^{(0)} = 0$, obtemos $x^{(1)} = \frac{1}{2}\sin(1)$.

logo $n > \frac{1}{\log(\frac{1}{2}(1+\cos 1))} \log\left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(1)}{1/2 \sin(1)} \cdot 10^{-6}\right)$, isto é, $n > \dfrac{1}{\log\left(\frac{1}{2}(1+\cos(1))\right)} \log\left(\dfrac{1-\cos(1)}{\sin(1)} \cdot 10^{-6}\right)$

d) Seja $f(x) = x^2 - \sin^2(x+1)$. Temos que:

$f(0) < 0$ e $f(1) > 0$

I $f \in C^\infty[0, 1]$

$- \ f'(x) = 2x - \sin(2(x+1))$

Logo para encontrar a interseção, basta fazer

$x^{(0)} \in I$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{(x^{(n)})^2 - \sin^2(x^{(n)}+1)}{2x^{(n)} - \sin(2x^{(n)}+2)}$$